

FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA

TEXTO BASE PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LOS PRIMEROS NIVELES
DE LAS CARRERAS DE INGENIERIA DE LA UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE

SEGUNDO SIMÓN BOLÍVAR BATALLAS BEDÓN
2026

ISBN: 978-9942-7496-2-8



9 789942 749628

CRÉDITOS

Pares revisores académicos externos

Mendoza Salazar María José, Msc.
Marymjc60@hotmail.com/Universidad Internacional de la Rioja,
España

Ángel Alexis Manobanda Suárez, Ing.
angelmanobandasuarez@gmail.com/Universidad Técnica de
Manabí, Ecuador

Revisión de estilo

Esp. Nataly Castro

Dirección de Arte y Diagramación

Dr. Bolívar Batallas Ph.D

sbbatallas@utn.edu.ec

Universidad Técnica del Norte, Ecuador

1° edición digital: abril 2026 / ISBN.....

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin la previa
autorización escrita de la editorial Universidad Técnica del Norte

Autor

Dr. Bolívar Batallas Ph.D

Docente investigador-Facultad de Ingeniería en Ciencias
Agropecuarias y Ambientales

Grupo de Investigación de Etnociencia (GIETNO)

Universidad Técnica del Norte, Ecuador

sbbatallas@utn.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0001-5818-8972>



FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA:

“Texto Base para la Enseñanza de la Matemática en los
Primeros Niveles de las Carreras de Ingeniería de la
Universidad Técnica del Norte”

Autor:

Segundo Simón, Bolívar Batallas Bedón

Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-5818-8972>

Correo: sbbatallas@utn.edu.ec

Filial: Universidad Técnica del Norte, Ecuador

Editorial “ACACFESA SAS”

La presente obra fue revisada por 2 pares académicos externos ciegos conforme al proceso editorial de ACACFESA SAS.

Los rigurosos procedimientos editoriales de ACACFESA SAS garantizan la selección de manuscritos por sus aportes significativos al conocimiento y cualidades científicas.

Editorial: ACACFESA SAS.

Sello editorial: 978-9942-7496

Teléfono: (+593) 998955446

Web: <https://acacfesa.com/editorial/index.php/1>

ISBN: 978-9942-7496-2-8

Doi:<https://doi.org/10.70577/mgqx3m06/ACACFESA.EDITORIAL/2025>

Año: Febrero 2026

Aviso Legal

El contenido de esta obra, que incluye ilustraciones, textos, tablas, gráficos, cuadros y referencias

bibliográficas, es responsabilidad única del autor . Lo que se ha dicho, los criterios y los datos no reflejan necesariamente la posición institucional ni el pensamiento de la Editorial ACACFESA SAS.

Derechos de Autor ©

Los derechos de autor corresponden a Segundo Simón Bolívar Batallas Bedón



Esta obra está bajo una licencia internacional [Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

La "Editorial ACACFESA SAS " y todos sus autores tienen la propiedad única de los derechos de autor y de propiedad intelectual e industrial relacionados con el contenido de esta publicación. La reproducción total o parcial de esta obra, su almacenamiento en sistemas informáticos, su tratamiento digital y cualquier tipo de distribución, transmisión o comunicación pública por medios electrónicos, ópticos, mecánicos, químicos, fotográficos o de grabación están prohibidos. Esto se encuentra bajo las sanciones que establece la legislación vigente a menos que se cuente con la autorización previa y por escrito de los titulares del copyright.

Queda excluido únicamente el uso con fines académicos o de investigación científica, siempre que no busque objetivos comerciales y se ejecute sin remuneración, debiendo mencionarse en todo momento a la fuente editorial correspondiente. Los autores son los únicos responsables de las opiniones expresadas en los diferentes capítulos, las cuales no necesariamente representan el punto de vista institucional de la editorial.

Constancia de Arbitraje

La Editorial ACACFESA SAS, certifica que este libro es el resultado de un estudio llevado a cabo por el autor, el cual fue evaluado por jurados expertos bajo el sistema de Revisores por Pares Externos, tanto en contenido como en forma. Asimismo, se llevó a cabo un análisis del método de investigación, paradigma y enfoque, utilizando las normas APA, Séptima Edición y el proceso de antiplagio en línea turnitinedu para asegurar que la obra fuera científica.

Mendoza Salazar María José

Nombre del revisor/a 1

Ángel Alexis Manobanda Suárez

Nombre del revisor/a

DEDICATORIA

Esta obra está dedicada a los estudiantes que ingresan a la Universidad Técnica del Norte a formarse como profesionales éticos y competentes de acuerdo con la misión y visión de nuestro Alma Mater.

También dedico a mi esposa Nataly Castro y a mis hijos Bolívar Josué y Bolívar Santiago.

ÍNDICE DE CONTENIDO

DEDICATORIA	viii
ÍNDICE DE CONTENIDO	ix
PRÓLOGO.....	xvi
INTRODUCCIÓN AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO... 1	
INTERPRETACION DE ENUNCIADOS MATEMÁTICOS3	
UNIDAD I: SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES..... 1	
1.1. NUMEROS NATURALES	1
1.2. NÚMEROS ENTEROS	1
1.3. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES... 2	
1.4. NÚMEROS IRRACIONALES.....	3
1.5. TRANSFORMACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES A FRACCIÓN	4
1.6. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES	9
1.7. OPERACIONES CON NÚMEROS REALES	11
1.8. NOTACIÓN CIENTÍFICA.....	12
1.9. INTERVALOS E INECUACIONES.....	15
1.9.1. INTERVALOS.....	15
1.9.2. INECUACIONES	19
1.10. VALOR ABSOLUTO	24
1.11. EJERCICIOS PROPUESTOS: UNIDAD I	29

1.11.1. OPERACIONES CON NÚMEROS REALES .	29
1.11.2. NÚMEROS IRRACIONALES	30
1.11.3. NOTACIÓN CIENTÍFICA.....	31
1.11.4. INTERVALOS E INECUACIONES.....	31
1.11.5. VALOR ABSOLUTO.....	37
UNIDAD II: ÁLGEBRA	39
2.1. EXPRESIÓN ALGEBRAICA	39
2.2. TÉRMINO ALGEBRAICO.....	39
2.3. GRADO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS	41
2.3.1 GRADO ABSOLUTO	41
2.3.2 GRADO RELATIVO	42
2.4. TÉRMINOS SEMEJANTES	42
2.5. REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES.....	42
2.6. CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS.....	43
2.6.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES	43
2.6.2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS IRRACIONALES..	44
2.6.3. EXPRESIONES ALGEBRAICAS HOMOGÉNEAS ..	44
2.6.4. EXPRESIÓN ALGEBRAICA HETEROGÉNEA	44
2.6.5 POLINOMIO COMPLETO.....	45
2.6.6 POLINOMIO ORDENADO.....	45
2.7. VALOR NUMÉRICO	45

2.8. INTRODUCCIÓN DE TÉRMINOS EN SIGNOS DE AGRUPACIÓN	46
2.9. SUPRESIÓN DE SIGNOS DE AGRUPACIÓN.....	47
2.10. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.....	48
2.10.1 SUMA O ADICIÓN	48
2.10.2 RESTA O SUSTRACCIÓN	50
2.10.3 MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.....	52
2.10.4. DIVISIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS	53
2.11. PRODUCTOS NOTABLES	62
2.12. FACTORIZACIÓN	64
2.12.1 CASOS DE FACTORIZACIÓN	65
2.12.2 FACTOR COMÚN	65
2.12.3 BINOMIOS.....	67
2.12.4 DIFERENCIA DE CUADRADOS.....	67
2.12.5 SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS	67
2.12.6 TRINOMIOS	69
2.12.7 CRITERIO PARA FACTORIZAR UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.....	69
2.12.8. CRITERIO PARA FACTORIZAR UN TRINOMIO DE LA FORMA $x^2 + bx + c$, O TRINOMIO SIMPLE	70

2.12.9. TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$, O TRINOMIO COMPUESTO.	72
2.12.10. FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$, O TRINOMIO COMPUESTO, POR EL CRITERIO DE ASPA.	74
2.12.11. POLINOMIOS QUE NO SON FACTORIZABLES DIRECTAMENTE	76
2.13. EXPRESIONES RACIONALES.....	78
2.13.1 FRACCIÓN ALGEBRAICA.....	78
2.13.2 SIGNOS DE UNA FRACCIÓN ALGEBRAICA	79
2.14. CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.....	79
2.14.1 FRACCIÓN PROPIA	80
2.14.2 FRACCIÓN IMPROPIA	80
2.14.3 FRACCIONES HOMOGÉNEAS.....	80
2.14.4 FRACCIONES HETEROGÉNEAS	81
2.14.5 FRACCIONES EQUIVALENTES.....	81
2.14.6 FRACCIONES IRREDUCIBLES	82
2.15. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES	82
2.16. OPERACIONES CON FRACCIONES.....	87
2.16.1 SUMA Y RESTA DE FRACCIONES	87
2.16.2. MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES	89
2.16.3 DIVISIÓN DE FRACCIONES.....	91

2.16.4 FRACCIÓN COMPLEJA O COMPUESTA.....	92
2.16.5 EXPRESIÓN MIXTA DE UNA FRACCIÓN ..	95
2.17. ECUACIONES LINEALES Y SISTEMA DE ECUACIONES	97
2.17.1. ECUACIONES LINEALES	97
2.17.2 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	102
2.18. ECUACIONES CUADRÁTICAS	118
2.19. EJERCICIOS PROPUESTOS UNIDAD II	128
2.19.1. TÉRMINO ALGEBRAICO	128
2.19.2. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.....	128
2.19.3. PRODUCTOS NOTABLES	130
2.19.4. FACTORIZACIÓN.....	138
2.19.5. ECUACIONES LINEALES Y SISTEMA DE ECUACIONES	140
2.19.6. ECUACIONES CUADRÁTICAS	145
UNIDAD III: TRIGONOMETRÍA	156
3.1. MEDIDAS DE ANGULOS	156
3.2. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	164
3.2.1. DEFINICIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	165
3.3. RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTÁNGULOS	171

3.3.1. APLICACIONES DE LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS PARA OBTENER LOS VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 45° , 30° Y 60°	174
3.4. SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL PLANO CARTESIANO	179
3.5. RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS.....	180
3.6. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS	183
3.7. RESOLUCION DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.....	187
3.7.1 LEY DE SENOS.....	188
3.7.2 LEY DE COSENOS	194
3.7.3 LEY DE TANGENTES	200
3.8. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS.....	204
3.9. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS	207
3.10. EJERCICIOS PROPUESTOS: UNIDAD III	210
3.10.1. MEDIDAS DE ÁNGULOS	210
3.10.2 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.....	214
3.10.3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.....	217
3.10.4. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS	219
3.10.5. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS	224

3.10.6. SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS	227
UNIDAD IV.....	230
4. RESPUESTAS A ALGUNOS EJERCICIOS PROPUESTOS	230
4.1. UNIDAD I: SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES	230
4.2. UNIDAD II: ALGEBRA	234
4.3. UNIDAD III TRIGONOMETRÍA.....	240
5. BIBLIOGRAFIA	245

PRÓLOGO

La obra “Fundamentos de la matemática texto base para la enseñanza de la matemática en los primeros niveles de las carreras de ingeniería de la Universidad Técnica del Norte” se ha escrito en función de los resultados que se obtienen en los primeros semestres de las carreras de la Facultad de Ingeniería en Ciencias Agropecuarias y Ambientales de la UTN, los mismos que no son los esperados en la formación universitaria, los vacíos científicos y académicos que tienen los estudiantes son muy grandes, esto se debe a la instrucción y formación académica secundaria que depende del lugar, condiciones, facilidad de acceso al conocimiento y calidad docente, dedicación estudiantil, condiciones de vida familiar etc. De la Unidad Educativa secundaria.

Esta obra pretende ser el auxiliar científico para llenar los conocimientos que servirán de cimiento para construir el entendimiento científico universitario logrando con ello disminuir la deserción y repitencia estudiantil, lo que redundara en la optimización del tiempo, recursos económicos familiares e institucionales en la formación del futuro profesional.

El autor pretende dar sentido al estudio de la matemática de tal manera que no sea una asignatura difícil de entender por el contrario que el estudiante encuentre satisfacción al

estudiar su contenido y siente bases firmes para sus estudios de ingeniería.

“Fundamentos de la matemática texto base para la enseñanza de la matemática en los primeros niveles de las carreras de ingeniería de la Universidad Técnica del Norte” consta de 4 unidades cada una de ellas explicadas didácticamente con teoría y ejercicios resueltos y que se ha recopilado a través de los años de experiencia del autor.

En la Unidad I se estudia lo relacionado al Sistema de los Números Reales donde se realiza un estudio de los números que conforman la recta numérica en el conjunto de los números reales.

En la Unidad II es el estudio del Algebra que empieza desde la definición más elemental de la expresión algebraica pasando por el factorio y termina con la solución del sistema de ecuaciones de primer y segundo grado.

La Unidad III es el estudio de la trigonometría donde se analiza desde lo que es un ángulo y terminamos con resolución de ecuaciones trigonométricas.

La Unidad IV consta de las respuestas a algunos ejercicios propuestos que se presentan al final de cada unidad los mismo que deben ser realizados por el estudiante con la guía profesional de sus maestros para consolidar su aprendizaje y conocimiento.

No se ha descuidado la revisión bibliográfica y en la sección de ejercicios propuestos se han considerado algunos ejercicios “típicos” de varios autores entre otros. Ramiro Proaño Viteri, Elbridge Vance, Rolando Sáenz, Jorge Lara, Hernán Benalcázar, García Ardura, Fred W. Sparks, entre otros.

Esta obra es la presentación unificada del Algebra y la Trigonometría.

En síntesis, esta obra busca lograr la accesibilidad al conocimiento matemático y trigonométrico de los estudiantes de la Universidad Técnica del Norte que inician sus estudios de ingeniería.

INTRODUCCIÓN AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

¿Generalmente se pregunta para qué sirve la matemática?
¿O para que se estudia matemática?

Contestando la primera pregunta debo manifestar que la matemática está en todos los ámbitos de nuestra vida, por ejemplo, hacer “cuentas” de los bienes que se tiene o cuanto e debe o como pagar una deuda entre lo más elemental, pero en lo más avanzado la matemática sirve para entender procesos más complejos en la solución de problemas. Ejemplos, en economía, en ingeniería de todo tipo, en formación de modelos matemáticos para producciones científicas, en fin, todo lo que podemos hacer es aplicación de las matemáticas.

En lo referente a la segunda pregunta se debe estudiar la matemática para desarrollar: la inteligencia humana, el razonamiento, la capacidad de análisis y síntesis, la disciplina que potencia la formación de seres humanos justos y con mentes desarrolladas y abiertas a los cambios naturales que el mundo lo exige. El inicio del estudio de la matemática debe ser organizada y motivada de tal manera que el estudiante se entregare al estudio de esta rama científica, este inicio va desde la comprensión de los conceptos primitivos y no primitivos.

Los conceptos no primitivos son los que se define en función de otros más sencillos previamente definidos o de conceptos primitivos, por ejemplo. Números naturales,

números primos, números racionales, números imaginarios, circunferencia, triángulos etc.

El pensamiento matemático es aquel que es organizado y capaz de transformar una definición literaria en símbolos matemáticos ejemplo:

El doble de un número: $2x$

La mitad de un número: $\frac{x}{2}$ etc.

El pensamiento matemático entre otros puede ser:

- Pensamiento numérico
- Pensamiento espacial y geométrico
- Pensamiento métrico
- Pensamiento aleatorio
- Pensamiento de sistemas algebraicos.

INTERPRETACION DE ENUNCIADOS MATEMÁTICOS

Para interpretar enunciados literarios en enunciados matemáticos se debe definir algunos t así:

Juicio: es el pensamiento mental que se tiene respecto a un objeto el mismo que afirma o niega algo.

Enunciado: es la definición verbal o escrita del juicio, ejemplo definición: el día que viene después del domingo es lunes.

Proposición: es un enunciado que describe algo se las simboliza generalmente con las letras últimas del abecedario (p, q, r, s, t, w, z). una proposición tiene un valor de verdad que puede ser verdadero (V) o falso (F) pero nunca a medias o ambigua. Ejemplo:

$$5 + 3 = 8 \text{ (V)}$$

$$7 - 4 = 9 \text{ (F)}$$

Las proposiciones pueden ser compuestas, esto es cuando se juntan 2 o más proposiciones simples unidas por un conector u operador lógico. Ejemplo:

$$3 + 2 = 7 \text{ y } 9 + 5 = 8$$

Para determinar el valor de verdad se evaluará cada proposición simple (V) o (F) y se opera aplicando las definiciones lógicas de cada operador.

TABLAS DE VERDAD

Una tabla de valor es una construcción de valores de verdad entre 2 o más proposiciones con todas sus posibilidades que pueden tomar entre ellas así:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Cada conector tiene su definición, de valor de verdad, los mismos que se enuncian a continuación.

Conjunción: corresponde a la letra “y”, se simboliza con $\wedge$ para unir a 2 o más proposiciones simples. Ejemplo:

$$5 + 2 = 7 \quad \text{y} \quad 9 + 3 = 10$$

$$p: 5 + 2 = 7 \text{ (V)}$$

$$q: 9 + 3 = 10 \text{ (F)}$$

Sería:

p	$\wedge$	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	F

IMPORTANTE: En la conjunción es verdadera cuando las 2 proposiciones son verdaderas y falso en todas las demás.

Negación: la negación de una proposición p se representa por $\sim$ se lee de algunas maneras:

- a) No p
- b) Es falso que p
- c) No es verdad la proposición p

$$p: 5 + 2 = 7 (V)$$

$$\sim p: 5 + 2 \neq 7 (F)$$

p	$\sim p$
V	F
F	V

Conjunción negativa: se representa así " $\downarrow$ " se simboliza así: $p \downarrow q$, se lee: ni p ni q o no p y no q

p	$\downarrow$	q
V	F	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

IMPORTANTE: la operación con este conector es positivo únicamente cuando las dos proposiciones son falsas en los otros casos es falso.

Disyunción: corresponde a la letra "o" y se simboliza así: $\vee$, se representa así: $p \vee q$ y se lee: p o q , también se la conoce como disyunción inclusiva.

p	$\vee$	q
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

IMPORTANTE: este operador lógico se obtiene una falsedad cuando las dos proposiciones simples son falsas en los otros casos su valor de verdad es verdadero.

Disyunción exclusiva: corresponde a la letra "o" si simboliza con la " $\underline{\vee}$ " se representa así: $p \underline{\vee} q$ y se lee: p o q pero no ambas.

p	$\underline{\vee}$	q
V	F	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

IMPORTANTE: con este operador lógico se obtiene verdadero si tienen las proposiciones simples diferente valor de verdad y falso cuando tienen el mismo valor de verdad.

Condicional: se simboliza con " $\rightarrow$ " y se lee "*entonces*" se representa así: $p \rightarrow q$ esto se lee: "*p entonces q*" o también "*p solo si q*".

p	$\rightarrow$	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

IMPORTANTE: con este operador lógico se obtiene una falsedad cuando la proposición simple p es verdadera y la segunda proposición es falsa en los otros casos es siempre verdadero.

Bicondicional: se simboliza con " $\leftrightarrow$ " y se lee "*si y solo si*" se representa así: $p \leftrightarrow q$ esto se lee: "*p si y solo si q*"

p	$\leftrightarrow$	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

IMPORTANTE: con este operador lógico se obtiene verdadero si las dos proposiciones simples son verdaderas o falsas en los otros casos es falso.

Cuando se trabaja en lógico matemático con operadores lógicos se puede presentar casos donde el ejercicio está ya escrito con términos, pero también puede presentarse el ejercicio escrito en oraciones gramaticales, para lo cual debemos previamente escribirlo en lenguaje matemático considerando lo siguiente:

- Si la proposición compuesta está escrita con paréntesis, el conector lógico predominante o respuesta del ejercicio es el que está fuera del paréntesis. Ejemplo:

$$(p \vee q) \vee q \wedge p)$$

El operador lógico predominante o respuesta del ejercicio es la designación.

$$(p \wedge q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

El operador lógico predominante o respuesta del ejercicio es el condicional ($\rightarrow$) que está fuera de los paréntesis.

- En estos casos se elabora la tabla de verdad con todas las posibilidades de operación que se puedan asignar a las proposiciones simples y se opera de izquierda a derecha dejando al final el condicional predominante para operar entre la columna respuesta del primer paréntesis con la columna respuesta del segundo paréntesis.
- Se debe representar las oraciones gramaticales por enunciados simbólicos matemáticos. Ejemplo.

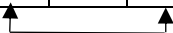
$p: 7 + 2 = 9(\vee)$ o $q: 8 + 2 = 10(\vee)$ y $r: \text{yo soy estudiante} (\vee)$.

Estas tres afirmaciones en enunciados simbólicos matemáticos sería:

$$(p \vee q) \wedge r$$

El valor de verdad de esta expresión sería: verdadero

$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	r
$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$



Ejemplos:

- Sean p : él es profes
 q : el viene a la Universidad
 t : él visita la biblioteca

Con estas proposiciones redactar las siguientes proposiciones compuestas:

a) $(p \wedge q) \rightarrow \sim t$

Solución:

Él es profesor y viene a la universidad entonces no visita la universidad.

b) $\sim p \vee (q \wedge t)$

Solución:

Él no es profesor o él viene a la Universidad y visita la biblioteca.

c) $\sim t \leftrightarrow p \rightarrow q$

Solución:

El no visita la biblioteca si y solo si él es profesor implica que él viene a la Universidad.

2. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas a partir de las siguientes proposiciones simples:

p: yo vivo en Ibarra (V)

q: $3+2=7$ (F)

r: yo voy al cine el sábado (V)

a) $(p \wedge q) \vee r$

Solución:

$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	r
V	F	F	V	V

b)

$\sim$	p	V	$\sim$	q	$\rightarrow$	r
F	V		V	F		V
		V				
					V	

3. Encontrar el valor de verdad de la siguiente proposición compuesta.

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (r \underline{\vee} q)$$

Solución:

Para determinar el número de posibilidades de verdadero y falso que debe tener las variables se utiliza lo siguiente:

2^n siendo el número de proposiciones simples.

$2^3 = 8$ alternativas entre verdadero y falso, estas alternativas se ubican de la siguiente manera la primera proposición simple tendrá la mitad de probabilidades de verdadero y la otra mitad de probabilidades de falso, para la segunda proposición simple será de la misma manera la mitad de las probabilidades de la primera proposición (p) será verdadera y las otras serán falsas y así hasta terminar con las 8 probabilidades s que se obtienen en este cálculo, para la tercera proposición simple la asignación de verdaderos y falsos será la mitad de la anterior así:

(p)	$\wedge$	(q)	$\leftrightarrow$	$(r$	$\underline{\vee}$	$q)$
V	V	V	F	V	F	V
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V	F
F	F	F	V	F	F	F

NOTA: cuando se busca el valor de verdad de una proposición compuesta y el resultado obtenido en toda la columna es solo verdadero se dice que está proposición compuesta es una TAUTOLOGÍA, pero si en la columna respuesta tiene todas las alternativas negativas se dice que es una NEGACIÓN.

Taller:

Aplicando las definiciones de los conectores lógicos determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

- 1) $p \wedge q \vee \sim q$
- 2) $(p \vee q) \Leftrightarrow (r \wedge p)$
- 3) $\sim p \wedge \sim q \rightarrow \sim r$
- 4) $(p \rightarrow q) \underline{\vee} (r \rightarrow s)$
- 5) $\sim(p \vee q) \wedge \sim(r \wedge t)$

ESTRATEGIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver problemas de matemática existe muchas maneras dependiendo de la capacidad de análisis del estudiante y la forma de interpretar mentalmente la posible solución del problema de tal manera que se debe entender que en matemáticas no existe una sola forma de resolverlo, pero independientemente de estas formas la

respuesta es única esto es lo que le da el carácter de ciencia exacta.

Se sugieren seguir los siguientes pasos o procesos para encontrar orden y en algunos casos “fácil” solución.

- 1) Se debe leer el ejercicio tantas veces sea necesario hasta comprender el texto del ejercicio e identificar cuáles son los datos y cual la o las incógnitas.
- 2) Mentalmente se debe buscar la lógica de la solución y ésta expresarla por escrito en el documento que se está elaborando.
- 3) Se debe intentar tantas veces sea necesario probando diferentes procesos de solución y nunca darse por vencidos después del primer intento, he escuchado a muchos de mis estudiantes que manifiestan yo no soy bueno para la matemática porque a la primera reacción no logran resolverlo.
- 4) Se debe realizar muchos muchísimos ejercicios de aplicación para fortalecer lo aprendido en clases y aprendido por usted Sr. Estudiante, por esto este libro contiene una variedad grande de ejercicios propuestos para que sean resueltos en clases con la ayuda del docente y en trabajos extra clase.
- 5) Una buena alternativa de aprendizaje suele ser volver a repetir los ejercicios resueltos en clases sin mirar los apuntes que generalmente toman los estudiantes.

- 6) Es conveniente formar grupos de estudio porque la discusión en la búsqueda de soluciones ayuda a profundizar el aprendizaje.
- 7) El uso del internet es también un medio que posibilita, el aprendizaje buscando AYUDAS para la solución de problemas.
- 8) Se debe mantener disciplina en el estudio de la matemática esto es fijarse consigo mismo un compromiso de estudios diariamente de la matemática al menos 60 minutos diarios.
- 9) En trigonometría es conveniente realizar un gráfico que visualice las condiciones del problema para objetivizar su solución.
- 10) De ser necesario se puede construir una maqueta aten las condiciones del problema para llevarlo a la practica la solución teórica.

Éxitos en el estudio de esta obra que se la ha realizado en forma didáctica y pedagógica para que su aprendizaje sea fácil y se logre significatividad en lo aprendido.

Con mucho aprecio.

Bolívar Batallas Bedón

Autor

UNIDAD I: SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

1.1. NUMEROS NATURALES

Los números naturales son los que van del uno al infinito y sirven para contar. Se simboliza con N

$$N = \{1.2.3.4.5.6.7.8.9.....\}$$

Los números naturales se usan como ordinales y cardinales.

Números ordinales: Son los que expresan orden y sucesión de sujetos o hechos, ejemplo.

Primero (1), segundo (2), tercero (3)

Números cardinales: Son los que expresan la cantidad de elementos que contiene un conjunto, ejemplo.

20 estudiantes, 8 líneas de transporte, 48 profesores, etc.

1.2. NÚMEROS ENTEROS

Se simboliza con la letra “Z”.

Estos números lo conforman tres subgrupos que son los números enteros negativos, números enteros positivos y el número neutro cero.

..... -3,-2,-1,0,1,2,3.....

Se simboliza a los números enteros negativos con Z^- , a los números enteros positivos con Z^+ , y al número cero con 0, por lo tanto, el conjunto de los números enteros es:

$$Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ ; \text{ donde}$$

Z: Conjunto de números enteros.

Z^- : Conjunto de números enteros negativos.

$\{0\}$: Conjunto unitario formado por el elemento cero.

Z^+ : Conjunto de números enteros positivos.

1.3. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Número racional. - Es aquel que puede expresarse como la razón (división de dos números) exceptuando la división para cero.

Se simboliza con la letra Q

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \text{ donde } a \in Z \text{ y } b \in Z \right\} b \neq 0$$

El conjunto de los Números Racionales “Q” está formado por los números enteros, los números fraccionarios y decimales.

1.4. NÚMEROS IRRACIONALES

Números irracionales son aquellos cuya expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas, por tanto, no tienen expresión fraccionaria.

Ejemplos:

$$\sqrt{2} = 1,414213562 \dots \dots$$

$$\sqrt{10} = 3,16227766 \dots \dots$$

$$\sqrt[6]{25} = 1,709975947 \dots \dots$$

$$\pi = 3,1415 \dots \dots \dots$$

$$e = 2,7182 \dots \dots \dots$$

Para realizar operaciones matemáticas con estos números irracionales conviene aproximarlos a un número determinado de cifras decimales utilizando las reglas de la aproximación de acuerdo al Sistema Internacional de Medidas (si el número que se va a descartar en los decimales es ≥ 5 al numero anterior se lo sube en una unidad ejemplo.

$e = 2,7182 \dots \dots$ aproximado a dos decimales sería $e = 2,72$

1.5. TRANSFORMACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES A FRACCIÓN

Número decimal exacto:

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$2,435 = \frac{2435}{1000} = \frac{487}{200}$$

Número decimal periódico se simboliza con: $a, \widehat{cd}$; donde a es la parte entera y $\widehat{cd}$ es la parte decimal periódica del número. Ejemplos:

$2, \widehat{23}$ quiere decir 2, 23232323.....

$9, \widehat{8741}$ quiere decir 9,874187418741|.....

$115,9\widehat{42}$ quiere decir 115,94242424242.....

Ejercicios:

Escribir los siguientes números periódicos como números racionales:

1. 0,333333.....
2. 5,272727.....
3. 2,73232
4. 4,35872872872

Solución:

Para escribir números periódicos en números racionales se procede así:

1. Al número periódico se iguala a una variable x:

$$0,333333..... = 0,\hat{3}$$

$$x = 0,\hat{3}$$

2. En la ecuación formada anteriormente se multiplica por un factor de diez (10) que depende del número de decimales si el periodo es un solo número entonces se multiplica como está indicado, si el periodo es de dos números se multiplica por cien (100), si el periodo es de tres números se multiplica por mil (1000) y así sucesivamente.

$$10x = 3,\hat{3}$$

Se restan las dos ecuaciones anteriores:

$$10x = 3,\hat{3}$$

$$\underline{-(x = 0,\hat{3})}$$

$$9x = 3$$

$$x = \frac{3}{9} \quad ; \quad x = \frac{1}{3}$$

2) Escribir 5,272727 como número racional:

Solución:

$$5,272727 \dots ; 5,\widehat{27}$$

$$x = 5,\widehat{27}$$

$$\overline{100x = 527,\widehat{27}}$$

$$99x = 522 ; x = \frac{522}{99}$$

$$3) 2,73232 \dots = 2,7\widehat{32} = \frac{2732-27}{990} = \frac{2705}{990} = \frac{541}{198}$$

$$4) 4,35872872872 \dots = 4,358\widehat{72} = \frac{435872-435}{99900} = \frac{435437}{99900}$$

Ejercicios desarrollados

$$\begin{aligned} 1. \quad & \left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{-4} - \sqrt[3]{2^{-1}:\sqrt{16}} + \sqrt{(\sqrt[3]{8})^{-1}:2} \\ & = \left(\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)^{-4} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)} \\ & = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ & R = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad & \sqrt{\sqrt{\left[(-5) - \frac{1}{8}\right] \left(-\frac{1}{2}\right)}} - \sqrt{\sqrt{\sqrt{(-4)^2(-2)^3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}}} \\
&= \sqrt{\sqrt{\left[-10 - \frac{1}{8}\right] \left(-\frac{1}{2}\right)}} - \sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} \\
&= \sqrt{\sqrt{-\frac{81}{8} \left(-\frac{1}{2}\right)}} - 2 \\
&= \sqrt{\sqrt{\frac{81}{16}}} - 2 \\
&= \frac{3}{2} - 2 \\
&R = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & \left(\frac{\sqrt[6]{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8}}}{1 - \frac{1}{2}} \right)^2 - \frac{-2 + 2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{2 - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}} \\
&= \left(\frac{\sqrt[6]{\frac{1}{64}}}{\frac{1}{2}} \right)^2 - \frac{-2 + \frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{12}}} \\
&= 1 - \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} + 4 \\
&R = 4
\end{aligned}$$

$$4. \left(\frac{36}{3+\frac{3}{5}} \right)^2 \times \left[\left(-3 + \frac{5}{2} \right)^2 \right]^3 \times \left(\frac{\sqrt[4]{2+\frac{1}{4}}}{-1-\frac{3}{2}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{36}{\frac{18}{5}} \right)^2 \times \frac{1}{64} \times \left(\frac{\sqrt[4]{\frac{9}{4}}}{\frac{5}{-2}} \right)^2$$

$$= 100 \times \frac{1}{64} \times \frac{12}{50}$$

$$R = \frac{3}{8}$$

$$5. -2 + \left(\frac{2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{-2}}{-3 + (-1)^{-5}} \right)^{-2} \left(\frac{\frac{5}{2^2} - \frac{3}{4} + 1}{(-2)^{-2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2} \right)^2 + \frac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} - 2}}$$

$$= -2 + \left(\frac{-2}{-4} \right)^{-2} \times \left(\frac{\frac{6}{4}}{\frac{1}{2}} \right)^2 + \frac{-1}{\frac{-1}{2}}$$

$$= -2 + 4 \times 9 + 2$$

$$= -2 + 36 + 2$$

$$R = 36$$

1.6. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Los números reales gozan de las siguientes propiedades:

a. **Propiedad conmutativa.** - Esta propiedad aplica para la suma y la multiplicación.

a.1 **Propiedad conmutativa de la suma:** El orden de los sumandos no altera la suma total se simboliza:
 $a + b = b + a$ ejemplo:

$$5 + 3 = 3 + 5 = 8$$

a.2 **Propiedad conmutativa de la multiplicación:** El orden de los factores no altera el producto total se simboliza con: $a \cdot b = b \cdot a$ ejemplo:

$$7 \cdot 3 = 3 \cdot 7 = 21$$

Nota. - El punto significa multiplicación

b. **Propiedad asociativa.** - Permite agrupar a los términos y/o factores sin que altere el resultado final se simboliza:

b.1 Para la suma: $a + (b + c) = (a + b) + c$;
ejemplo:

$$2 + (3 + 5) = (2 + 3) + 5 = 10$$

b.2 Para la multiplicación: $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$;
ejemplo:

$$3(5 \cdot 4) = (3 \cdot 5)4 = 60$$

c. **Propiedad del elemento neutro.** - Es aquella que permite operar con el número 0.

c.1 **Para la suma.**- Se simboliza $a + 0 = a$; se la conoce como **identidad aditiva** ejemplo:

$$7 + 0 = 7$$

c.2 **Para la multiplicación.** – Se simboliza con $a \cdot 0 = 0$; ejemplo:

$$8 \cdot 0 = 0$$

c.3 **Propiedad del idéntico multiplicativo.**- Se simboliza $a \cdot 1 = a$; ejemplo:

$$15 \cdot 1 = 15$$

d. **Propiedad del inverso.** - Cada número tiene su inverso aditivo y su inverso multiplicativo.

d.1 **Inverso aditivo.**- se simboliza con $a + (-a) = 0$; el $-a$ es el idéntico sumativo de a ejemplo:

$$70 + (-70) = 0$$

d.2 **Inverso multiplicativo.** – Se simboliza con $a \cdot \frac{1}{a} = 1$; $\frac{1}{a}$ es el inverso multiplicativo de a ejemplo:

$$20 \cdot \frac{1}{20} = 1$$

- e. **Propiedad distributiva.-** Permite agrupar o distribuir elementos que tienen operación combinada de multiplicación con sumas o restas se simboliza con: $a(b + c) = a.b + a.c$
 $a(b - c) = a.b - a.c$; ejemplos:

$$7(5 + 2) = 7.5 + 7.2 = 70$$

$$9(6 - 3) = 9.6 - 9.3 = 27$$

- f. **Propiedad de la cerradura.** – Esta propiedad se aplica para todas las operaciones e indica que el resultado siempre será un elemento de los números reales ($\mathbb{R}$) se simboliza con

$$a + b \in \mathbb{R};$$

$$a - b \in \mathbb{R};$$

$$a.b \in \mathbb{R};$$

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{R};$$

1.7. OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

Con números reales podemos sumar, restar, multiplicar, dividir, potenciar y radicar.

Para realizar estas operaciones se utilizarán implícitamente las propiedades de las operaciones con números reales.

Hay que considerar que las raíces pares de cantidades subradicales negativas no se abordan en este libro ya que

los números que se obtienen como respuestas caen dentro del conjunto de los números imaginarios.

Ejemplos:

Operar las siguientes expresiones:

a) $15 - 20 + 30$

b) $\sqrt{25} + 8$

c) $9(3 - 8)$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 + \frac{7}{4}$

Solución:

a) $15 - 20 + 30 = 25$

b) $\sqrt{25} + 8 = 13$

c) $9(3 - 8) = -45$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 + \frac{7}{4} = \frac{1}{4} - \frac{24}{4} + \frac{7}{4} = -\frac{16}{4} = -4$

1.8. NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica es la forma matemática de escribir cantidades muy grandes o muy pequeñas en una forma clara entendible y fácil de expresar y operar.

Se basa en transformar a un número dado en base diez elevado a una potencia, se simboliza de la siguiente manera.

$m = a \cdot 10^n$; donde:

m: Es el numero dado grande o pequeño.

a: El número dado < 10 (se consigue recorriendo la coma decimal).

10: Base de la escritura en notación científica.

n: Potencia que puede ser positiva o negativa a la cual se debe elevar el número, se obtiene contando el número de saltos que ha dado la coma decimal a izquierda o derecha del número dado.

Nota: la potencia ***n*** del número diez es positiva cuando se obtiene de un número mayor que diez y es negativa cuando se obtiene de un número decimal.

Ejemplos:

Transformar los siguientes números a Notación Científica.

- a) 158
- b) 2520
- c) 5450,8
- d) -724295
- e) 0,00072
- f) 0,054321
- g) 0,000092

Solución:

a) $158 = 158,0$

158 es mayor a diez, recorremos la coma dos espacios hacia la izquierda, quedaría 1,58 (este número cumple con la condición indicada anteriormente que debe ser menor a diez) se multiplica por diez y como recorrió dos espacios quedaría elevado al cuadrado por lo tanto el número 158 escrito con Notación Científica sería:
 $158 = 1,58 \times 10^2$

b) $2520 = 2,52 \times 10^3$

c) $5450,8 = 5,4508 \times 10^3$

d) $-724255 = -7,24255 \times 10^5$

e) $0,00072 = 7,2 \times 10^{-4}$

f) $0,054321 = 5,4321 \times 10^{-2}$

g) $0,000092 = 9,2 \times 10^{-5}$

Para operar este tipo de números se puede hacer las mismas que se hacen con números reales, pero conviene acordar el número de decimales con el que se trabajará como en el tema anterior que se explicó al respecto.

1.9. INTERVALOS E INECUACIONES

1.9.1. INTERVALOS

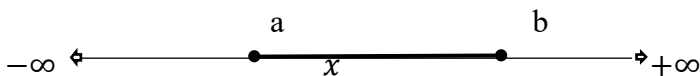
Es el conjunto de los números reales que están entre dos números dados, estos son:

- Intervalo cerrado
- Intervalo abierto
- Intervalos semiabiertos a izquierda o a derecha
- Intervalos infinitos

Intervalo cerrado. - Sean a y b dos números reales. El conjunto de los números reales que están entre a y b son iguales a a o $a b$. Se simboliza con $[a, b]$. Y se define así:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

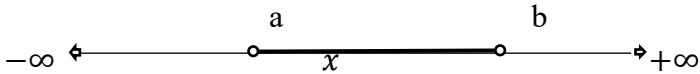
Gráficamente se expresa con los extremos pintados sobre la recta numérica en a y b :



Intervalo abierto. - se define de manera similar al anterior con la variación de que los extremos a y b no forman parte de la solución, se simboliza así: $]a, b[$ y se define de la siguiente manera:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

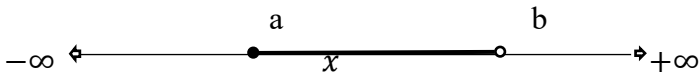
Gráficamente:



Intervalo semiabierto a derecha.- Se simboliza con $[a, b[$ y se define así:

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

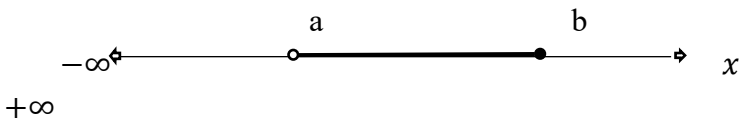
Gráficamente:



Intervalo semiabierto a izquierda.- Se simboliza con $]a, b]$ y se define así:

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Gráficamente:

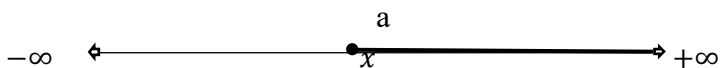


Intervalos infinitos. - Son aquellos que uno de sus extremos o ambos tienden al infinito, hay que considerar que para su representación matemática en el extremo hacia el infinito siempre será un intervalo abierto.

Estos intervalos son los siguientes:

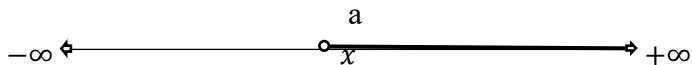
$$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

Gráficamente:



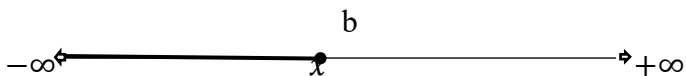
$$]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

Gráficamente:



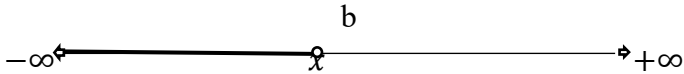
$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

Gráficamente:



$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

Gráficamente:



La notación de intervalos se utiliza para la escritura de los conjuntos solución de las inecuaciones o desigualdades.

Propiedades de las desigualdades

1. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
2. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$
3. Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$
4. Si $a > b$ y c positivo, entonces $ac > bc$
5. Si $a > b$ y c es negativo, entonces $ac < bc$.
6. $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b < 0)$.
7. $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ y } b < 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b > 0)$.

1.9.2. INECUACIONES

Una inecuación es una expresión algebraica que tiene un símbolo de desigualdad que puede ser:

$>$; se lee mayor que

$\geq$; se lee mayor o igual que

$<$; se lee menor que

$\leq$; se lee menor o igual que

$\neq$; se lee diferente

Ejemplos:

- $5x - 4 > \frac{1}{2}$
- $8x - 7 \leq 4x + 5$
- $5x^2 + 3x - 2 \neq 0$

Para resolver este tipo de inecuaciones se utilizan las propiedades de las desigualdades:

Resolver inecuaciones es encontrar el conjunto de todos los números reales que satisfacen la desigualdad, este conjunto se denomina el conjunto solución de la inecuación.

Ejemplos:

a) Resolver la siguiente inecuación:

$$4x + 3 > 2x - 5$$

$$4x + 3 > 2x - 5$$

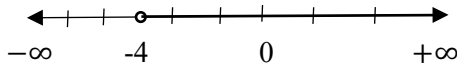
$$4x - 2x > -5 - 3$$

$$2x > -8$$

$$x > -4$$

Por lo tanto, las soluciones son todos los números reales mayores que -4 , es decir, los números del intervalo infinito $(-4, \infty)$.

Gráficamente:



b) Resolver la siguiente inecuación:

$$-5 \leq \frac{4-3x}{2} < 1$$

$$-5 \leq \frac{4-3x}{2} < 1$$

$$-10 \leq 4 - 3x < 2$$

$$-14 \leq -3x < -2$$

$$\frac{14}{3} \geq x > \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}$$

Por lo tanto, la solución son los números del intervalo semiabierto $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right]$.

Gráficamente:



c) Resolver: $x^2 - 7x + 10 > 0$

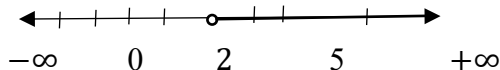
Solución: Factorando $x^2 - 7x + 10 > 0$ se obtiene como factores $(x - 5)(x - 2) > 0$

Resulta que x es una solución si y solo si los factores $x - 5$ y $x - 2$ son ambos positivos o ambos negativos. (Aplicando la propiedad: $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow a > 0 \text{ y } b > 0$)

$$(x - 5) > 0; x > 5; x \in]5; \infty[$$

$$(x - 2) > 0; x > 2; x \in]2; \infty[$$

Solución: $x \in]5; \infty[\cup]2; \infty[$



d) Resolver la inecuación: $\frac{2x-3}{x} > -2$

Solución:

x no puede tomar el valor 0.

Para transformar esta inecuación en una inecuación del tipo conocido debemos eliminar la x del denominador del primer miembro. Esto lo podemos conseguir multiplicando por x, lo que nos lleva a considerar dos casos pues el sentido de la nueva desigualdad dependerá del signo de x.

Caso 1. $x > 0$

$$\begin{aligned}\frac{2x-3}{x} > -2 &\Leftrightarrow 2x - 3 > -2x \\ &\Leftrightarrow 4x > 3 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$S_1 = \left] \frac{3}{4}, +\infty \right[$$

Caso 2 $x < 0$

$$\begin{aligned}\frac{2x-3}{x} > -2 &\Leftrightarrow 2x - 3 < -2x \\ &\Leftrightarrow 4x < 3 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$S_2 = \left] -\infty, \frac{3}{4} \right[$$

$$S = S_1 \cup S_2$$

Resolver:

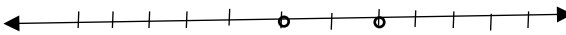
$$(x - 1)(2 - 3x) \geq 0$$

Según las propiedades tendríamos dos casos:

$$\text{Caso 1: } x - 1 > 0 \text{ y } 2 - 3x > 0$$

$$\text{Caso 2: } x - 1 < 0 \text{ y } 2 - 3x < 0$$

Resolviendo el caso 1:



$$x > 1 \text{ y } x < \frac{2}{3}$$

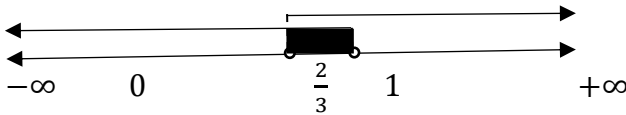
$$-\infty \qquad 0 \qquad \frac{2}{3} \qquad 1 \qquad +\infty$$

El resultado de este primer caso se obtiene intersecando las dos soluciones anteriores $x > 1 \cap x < \frac{2}{3}$ lo que nos da como resultado un conjunto vacío.

Resolviendo el caso 2: Se obtiene lo siguiente:

$$x < 1 \quad y \quad x > \frac{2}{3}$$

Gráficamente:



El conjunto solución es la unión de las dos soluciones anteriores: $\emptyset \cup]\frac{2}{3}, 1[=]\frac{2}{3}, 1[$

1.10. VALOR ABSOLUTO

Valor absoluto. - Se define de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a; & \text{si } a \geq 0 \\ -a; & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

1. $|a| < b$ si y sólo si $-b < a < b$.
2. $|a| > b$ si y sólo si $a > b$ o bien $a < -b$.
3. $|a| = b$ si y sólo si $a = b$ o bien $a = -b$.

De la definición anterior es claro que el valor absoluto de un número no puede ser negativo.

$|a| \geq 0$

EJEMPLOS

- a. $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$
- b. $|-3| = -(-3) = 3$
- c. $| -(-7) | = 7$
- d. $|0| = 0$
- e. $|1 - \sqrt{2}| = -(-1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$

Ejercicios:

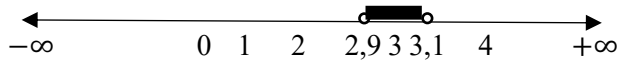
Resolver: $|x - 3| < 0,1$.

Usando las propiedades (1) de $|a|$; Tenemos:

$$\begin{aligned} -0,1 &< x - 3 < 0,1 \\ -0,1 + 3 &< (x - 3) + 3 < 0,1 + 3 \\ 2,9 &< x < 3,1 \end{aligned}$$

Expresando el resultado obtenido en notación de intervalos se obtiene: $x \in]2,9; 3,1[$.

Gráficamente



Resolver: $|2X - 7| > 3$.

Solución: Aplicando las propiedades de los valores absolutos (2) se obtiene lo siguiente:

$$2x - 7 > 3 \quad o \quad bien \quad 2x - 7 < -3$$

Resolviendo estas dos inecuaciones se obtiene:

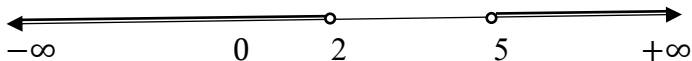
$$2x - 7 > 3; 2x > 3 + 7; x > \frac{10}{2}; x > 5$$

Este resultado en notación de intervalos sería $]5, \infty[$

La solución total se obtiene de unir las dos soluciones parciales anteriores así:

$$S =]-\infty, 2[\cup]5, \infty[.$$

Gráficamente:



Resolver:

$$||x| - 2| > 4$$

Aplicando las propiedades del valor absoluto, esta desigualdad es equivalente a

$$|x| - 2 < -4 \quad o \quad |x| - 2 > 4$$

Donde se obtiene

$$|x| < -2 \quad o \quad |x| > 6$$

La inecuación $|x| < -2$ es el conjunto vacío ($\emptyset$), por lo que habíamos manifestado que el valor absoluto de una cantidad es siempre un número real positivo.

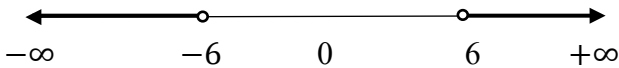
Resolviendo la segunda parte: $|x| > 6$ se obtiene aplicando las propiedades del valor absoluto como resultado:

$$x < -6 \quad o \quad x > 6$$

Por tanto, el conjunto solución

$$]-\infty, -6[\cup]6, +\infty[$$

Gráficamente:



Resolver:

$$(x + 2)(4 - x)(6x - 3) < 0$$

Este ejercicio lo vamos a resolver por tablas para lo cual se sigue el siguiente proceso:

1. Se iguala a cero (0) cada uno de los términos que contiene el valor absoluto para determinar los valores críticos así: $x + 2 = 0$; $4 - x = 0$; $6x - 3 = 0$; resolviendo estas ecuaciones se obtiene lo siguiente: $x = -2$; $x = 4$; $x = 1/2$
2. Se construye la tabla con los casilleros suficientes para ubicar a cada uno de los factores en vertical y los valores críticos en horizontal y se analiza en los intervalos determinados en el cuadro los signos de los valores que se obtendrían al ser reemplazados en las expresiones de la izquierda así:

Valores	-2	1/2	4	
$x + 2$	-	+	+	+
$4 - x$	+	+	+	-
$6x - 3$	-	-	+	+
$(x + 2)(4 - x)(6x - 3)$	+	-	+	-

3. Finalmente se aplica la ley de los signos para determinar el signo resultante de la última fila de la tabla.

4. El conjunto solución se determina dependiendo del ejercicio si este dice mayor que cero se toman los valores positivos de la tabla y si dice menor que cero se toman los valores negativos, en nuestro caso el ejercicio es: $(x + 2)(4 - x)(6x - 3) < 0$, entonces el resultado sería los casilleros que tienen el signo negativo:

$$x \in] - 2; \frac{1}{2}[\cup] 4; +\infty[$$

1.11. EJERCICIOS PROPUESTOS: UNIDAD I

1.11.1. OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

Resolver las siguientes operaciones con números reales.

1. $\{-10 + 15 - [-8 + 14 + (-19 + 35 - 20) - 7] + 19\}$
2. $22 - \{-10 - 3 - [-4 + (2 + 10) - 2] - 5\}$
3. $-(15 - 6) - \{-9 - 3 - [-20 - (11 - 16) - 10] - (6 - 7)\} - 10$
4. $\{-5 + 3[-4 - 3(-5 + 2)]\} - 8(-4 + 11)$
5. $-12) \div 4 - [-4 + 2(-2)] + (-2)$
6. $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{9} + (-3)^3 \div (-9) + [(-7)^6]^0$
7. $\sqrt[3]{8(-27)(-64)} + (-40 + 8) \div 4 + (-2)^5$

8. $(\sqrt[4]{16})^3 + [-6 - (-8 + 10)^2] + \sqrt{-2}\sqrt{-8} - \sqrt{144}$
9. $(-68 + 11) \div \sqrt[3]{-30 + 3} + (\sqrt[3]{65 - 1})^2 - \{[(-5)^3]^0\}^4$
10. $[\sqrt[4]{405 \div 5}]^3 \div \sqrt[3]{(40 \div 10)^2 + (36 - 25)}$

1.11.2. NÚMEROS IRRACIONALES

Los siguientes números decimales periódicos transformar a fracción y simplificar:

11. 3,5757
12. 0,2555
13. 7,5213213
14. 0,634141

Escribir como una fracción los siguientes números periódicos.

15. $2, \overline{72}$
16. $0, \overline{4874}$
17. $55, \overline{04}$
18. $122, \overline{043}$
19. $38, \overline{27}$

1.11.3. NOTACIÓN CIENTÍFICA

Escribir en notación científica los siguientes números aproximando su respuesta a dos decimales.

20. 55428,6

21. 7420

22. 7891044,466

23. 3822475,6

24. 0,094752

25. 987524,0321

26. 0,0005432

27. 0,0098765

28. 0,9854

29. 0,04847

30. $0,45 \times 10^2$

1.11.4. INTERVALOS E INECUACIONES

Resolver los siguientes ejercicios.

31. $5x + 2 > x - 6$

32. $3 - x < 5 + 3x$

33. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \leq 0$

34. $3 - 2x \geq 9 + 4x$

35. $13 \geq 2x - 3 \geq 5$

36. $-2 < 6 - 4x \leq 8$

37. $2 > -3 - 3x \geq -7$

38. $2 \leq 5 - 3x > 11$

$$39. \frac{4}{x} - 3 > \frac{2}{x} - 7$$

$$40. \frac{5}{x} < \frac{3}{4}$$

$$41. \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$$

$$42. \frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x}$$

$$43. x^2 > 4$$

$$44. x^2 \leq 9$$

$$45. (x-3)(x+5) > 0$$

$$46. x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$47. 1 - x - 2x^2 \geq 0$$

$$48. x^2 + 3x + 1 > 0$$

$$49. 4x^2 + 9x < 9$$

$$50. 2x^2 - 6x + 3 < 0$$

$$51. \frac{1}{3x-7} \geq \frac{4}{3-2x}$$

$$52. x^3 + 1 > x^2 + x$$

Resolver los siguientes ejercicios.

$$53. |x + 4| < 7$$

$$54. |2x - 5| < 3$$

$$55. |3x - 4| \leq 2$$

$$56. |3x + 2| \geq 1$$

$$57. |5 - x| > 7$$

$$58. |3 - x| < 5$$

$$59. |7 - 4x| \leq 9$$

$$60. |6 - 2x| \geq 7$$

$$61. |2x - 5| > 3$$

$$62. |x + 4| \leq |2x - 6|$$

$$63. |3x| > |6 - 3x|$$

$$64. |3 + 2x| < |4 - x|$$

$$65. |9 - 2x| \geq |4x|$$

$$66. |5 - 2x| \geq 7$$

$$67. \left| \frac{x+2}{2x-3} \right| < 4$$

$$68. \left| \frac{6-5x}{3+x} \right| \leq \frac{1}{2}$$

Graficar en la recta numérica y escribir con notación de intervalos los siguientes ejercicios.

$$69. (a) \{x|x > 2\} ; (b) \{x|-4 < x \leq 4\}$$

$$70. (a) \{x|x \leq 8\} ; (b) \{x|3 < x < 9\}$$

$$71. (a) \{x|x > 2 \text{ y } x < 12\}; (b) \{x|x \leq -4 \text{ o } x > 4\}$$

$$72. (a) \{x|x \geq -5 \text{ y } x \leq 5\}; (b) \{x|x < 3 \text{ o } x > 6\}$$

$$73. (a) \{x|x > 2\} \cap \{x|x < 12\}; (b) \{x|x \leq -4\} \cup \{x|x > 4\}$$

$$74. (a) \{x|x \geq -5\} \cap \{x|x \leq 5\}; (b) \{x|x < 3\} \cup \{x|x > 6\}$$

$$75. (a) \{x|x > -4\} \cap \{x|x \leq 0\}; (b) \{x|x \leq 0\} \cup \{x|x \leq 7\}$$

$$76. (a) \{x|x > -8\} \cap \{x|x \leq 0\}; (b) \{x|x > 2\} \cup \{x|x > 10\}$$

$$77. (a) (2,7); (b) [-3,6]; (c) (-5,4]; (d) [-10,-2)$$

$$78. (a) (-5,5); (b) [1,9]; (c) [-8,3); (d) (-7,0]$$

$$79. (a) [3, +\infty); (b) (-\infty, 0); (c) (-4, +\infty); (d) (-\infty, +\infty)$$

$$80. (a) (-\infty, -2]; (b) (-1, +\infty); (c) (-\infty, 10); (d) [0, +\infty)$$

Resolver las siguientes inecuaciones y su resultado expresar en notación de intervalos.

$$81. 20 \leq 4$$

$$82. 3x - 5 < 7$$

$$83. 2x - 1 < 6$$

$$84. 3x + 1 \geq 4 - 3$$

$$85. 2x + 1 > x - 4$$

$$86. 5x + 6 \leq x - 2$$

$$87. \frac{2x-5}{4} \leq 3$$

$$88. \frac{2x-9}{7} > 0$$

$$89. -3 > \frac{3x+5}{4}$$

$$90. \frac{x-5}{4} \leq x$$

$$91. \frac{2x-5}{3} < x + 1$$

$$92. 6x - 1 < \frac{5x-1}{3}$$

$$93. \frac{1}{2}x + 2 \leq \frac{1}{4}x + 3$$

$$94. 5 - \frac{1}{3}x \geq \frac{1}{4}x - 2$$

$$95. 10 - 3x > \frac{4x-5}{-3}$$

$$96. \frac{3x+8}{-5} < 4 - 2x$$

$$97. 5 \leq 2x - 3 < 13$$

$$98. 11 \geq 3x - 5 > 2$$

$$99. -7 < 2x + 1 < 3$$

$$100. 1 \leq 3x - 2 \leq 16$$

101. $1 < \frac{4x-1}{3} < 5$
102. $10 < 4 - 3x < 19$
103. $6 \leq 2 - x \leq 8$
104. $-1 < \frac{7-2x}{5} \leq 5$
105. $2 > -3 - 3x \geq -7$
106. $-1 < 2 - 2x \leq 3$
107. $-4 < \frac{5x+3}{-6} \leq 2$
108. $-4 \leq \frac{5+3x}{-2} \leq 5$
109. $x^2 > 9$
110. $x^2 < 4$
111. $(x+3)(x-4) < 0$
112. $(x-1)(x-5) > 0$
113. $(2x+1)(2x-7) > 0$
114. $(3x+5)(2x-3) < 0$
115. $x^2 - 4x + 3 \leq 0$
116. $x^2 + 6x + 8 \geq 0$
117. $4 - 3x - x^2 \geq 0$
118. $2x^2 + x - 1 \leq 0$
119. $x^2 > 8 - 2x$
120. $x^2 < 15 + 2x$

121. $x \leq 6 - 2x^2$
122. $4x^2 \geq 9 - 9x$
123. $16t^2 + 1 \geq 8t$
124. $9y^2 < 30y - 25$
125. $x(11 - 3x) < 10$
126. $x(6x - 1) \geq 15$
127. $(y + 3)(y - 1)(y - 4) > 0$
128. $(x + 4)(x^2 - 4) < 0$
129. $x^3 \leq 16x$
130. $6t^3 > 7t^2 + 3t$
131. $x^2 - x - 1 < 0$
132. $x^2 + 2x - 2 \geq 0$
133. $x^2 + x + 3 > 0$
134. $x^2 - 2x + 2 < 0$
135. $\frac{x-1}{2x+5} < 0$
136. $\frac{y+6}{y-4} \geq 0$
137. $\frac{5t}{t-4} \geq 6$
138. $\frac{3x-8}{2x+3} < 4$
139. $\frac{3x-11}{3x+5} < 7$
140. $\frac{4x-7}{5x+1} \geq 2$
141. $\frac{6-2x}{4+x} \leq 5$
142. $\frac{2-7t}{5-4t} > 4$

$$143. \frac{2}{3-y} > \frac{3}{2+y}$$

$$144. \frac{4}{2x-1} < \frac{1}{x+1}$$

$$145. \frac{5}{2x-1} < x - 2$$

$$146. \frac{6}{3w-4} > w + 1$$

$$147. \frac{5x}{x^2+2x-8} \geq 3$$

$$148. \frac{2x-7}{x^2-6x+8} \leq 1$$

1.11.5. VALOR ABSOLUTO

Obtener el conjunto solución y su respuesta expresar con notación de intervalos.

$$149. |x| \leq 5$$

$$150. |x| > 6$$

$$151. |x - 1| > 7$$

$$152. |x + 1| < 5$$

$$153. |x - 5| \leq 3$$

$$154. |3x - 4| \leq 2$$

$$155. |2x - 7| < 9$$

$$156. |3x - 4| \geq 2$$

$$157. |7 - 2x| > 9$$

$$158. 6 < |4x + 7|$$

$$159. 4 < |3x + 12|$$

$$160. |5 - 3x| \geq 10$$

$$161. |5x - 7| + 4 \leq 6$$

$$162. |4x - 3| - 3 > 6$$

$$163. \left| \frac{3}{2} - 2x \right| > \frac{1}{2}$$

$$164. \left| 2 - \frac{3}{4}x \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$165. |x^2 - 5| < 4$$

$$166. |y^2 - 10| \leq 6$$

$$167. |t^2 - 5t| \leq 6$$

$$168. |x^2 - 3x - 1| < 3$$

$$169. |x^2 - 17| \geq 8$$

$$170. |x^2 + x - 4| > 2$$

$$171. \left| \frac{x+4}{x} \right| < 3$$

$$172. \left| \frac{x+4}{x-4} \right| \geq 1$$

$$173. \left| \frac{r}{r+1} \right| \geq \frac{1}{2}$$

$$174. \left| \frac{3t}{t+1} \right| < 8$$

UNIDAD II: ÁLGEBRA

2.1. EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Es la notación de una expresión con letras y números, ejemplos:

$$8x, -5y, \frac{x-y}{x} + 2x^2 - 7, 5X^3 - 9X^2 - 8X - 20$$

2.2. TÉRMINO ALGEBRAICO

Un término algebraico es una expresión algebraica que está separado uno de otro por sumas o restas.

Todo término algebraico está constituido por:

- Un coeficiente que puede ser numérico o literal
- Las variables
- Un exponente en caso de ser de segundo grado en adelante
- Un signo positivo o negativo que va delante del término, ejemplo:

$$15x^2y - y + 8$$

Identifiquemos los elementos anteriores en estos términos:

1. $15x^2y$ es un término cuyo coeficiente es 15, x e y son las variables, x^2y tienen por exponente dos y uno respectivamente y el signo de este término es positivo que no se lo escribe, no así si sería de signo negativo lo que obligatoriamente tenemos que escribirlo.

2. $-y$ es otro término cuyo coeficiente es 1, la variable explícitamente se mira que es y , el exponente de y es 1 y el signo es negativo (-).
3. $+8$ es otro término cuyo coeficiente es 8, la variable es x^0 esto es igual a 1 el signo es positivo.

Observación: los términos de una expresión algebraica se los identifica porque están unidos por sumas o restas, **si estarían unidos por multiplicaciones o divisiones estos se llaman factores.**

Ejemplos de factores:

$$(8x^2y)(2x)(3x^3 - 2)$$

En este ejemplo $8x^2y$, $2x$ y $(3x^3 - 2)$ son factores, pero a su vez en los términos $8x^2y$, 8 , x^2 , y , son factores.

de acuerdo al número de términos que tenga la expresión algebraica se conoce con el nombre de:

Monomio: Un solo término. Ejemplo:

$$3x^2y$$

$$15m^{x+1}$$

$$\frac{2}{9}x^3y$$

Binomio: Dos términos. Ejemplos:

$$7y^2 + 2$$

$$4x - 4$$

$$y^{m+1} - y^{n-1}$$

Trinomio: Tres términos. Ejemplos:

$$3x^8 - 5x + 2$$

$$7x^2 - 6x^3y + 9y^5$$

$$21acx - 13xy - 16$$

Polinomio: se considera un polinomio a las expresiones algebraicas que tiene de dos términos en adelante. ejemplos:

$$a^2 - 2a^3b^4 + 5ab^3 - 18b^4$$

$$12m^4 - 8m^5 - 2m^3 - 10m + 24$$

$$x^5 - 12x^3y + 25x^2y^2 - 18x^3y^3 + 15y^6$$

2.3. GRADO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.3.1 GRADO ABSOLUTO

Es la suma de los exponentes de las letras del término.

$$6a^2b^3 \dots\dots\dots \textit{Quinto grado}$$

$$12x^3y \dots\dots\dots \textit{Cuarto grado}$$

$$9x \dots\dots\dots \textit{Grado uno}$$

2.3.2 GRADO RELATIVO

Es el exponente que lleva cada letra.

$$12m^2n^3$$

Con relación a m es de segundo grado.

Con relación a n es de tercer grado.

2.4. TÉRMINOS SEMEJANTES

Son aquellos términos algebraicos que tiene la parte literal y los exponentes iguales, sin importar el coeficiente, ejemplos:

$$3x, 5x - 8x + \frac{1}{3}x \text{ son términos semejantes}$$

$$-9x^2y^3 + x^2y^3 \text{ son términos semejantes.}$$

2.5. REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Para reducir dos o más términos semejantes se operan los coeficientes y se mantienen la parte literal.

Ejemplos:

$$3b + 2b - 1b = -5b$$

$$m^3 + 8m^3 + 2m^3 = 11m^3$$

$$9x^{m+1} - x^{m+1} = 8x^{m+1}$$

2.6. CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.6.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Son aquellas que se pueden expresar como una fracción
ejemplos:

$$\frac{9}{3x} + \frac{2}{x} - \frac{5}{8x} = \frac{105}{24x}$$

$$\frac{x}{5} + \frac{2x}{3} - \frac{4x}{6} = \frac{x}{5}$$

No se considera como una fracción algebraica aquella que tiene por denominador el cero (0) ya que esta división no está definida

Es importante recordar que una fracción se la puede escribir de las siguientes formas sin que altere su resultado:

$$-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} \quad ; \quad \frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$$

Una expresión algebraica es fraccionaria cuando la variable aparece en algún denominador.

Ejemplos:

$$\frac{3}{x} + xy + 7$$

$$x^{-2} + x^{-1}y^2 - 20 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}y^2 - 20$$

2.6.2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS IRRACIONALES

Son aquellas expresiones que la parte literal tiene como exponente un número fraccionario o también en el subradical tiene letras.

Ejemplos:

$$3x^{5/2} - 7x^{\frac{1}{3}} + 11x^{-\frac{4}{3}} - \sqrt[3]{3xy - 5yz^2}$$
$$\sqrt{2} - 8\sqrt{3m} + 7x\sqrt{y} + \sqrt{250}$$

2.2.3. EXPRESIONES ALGEBRAICAS HOMOGÉNEAS

Una expresión algebraica es homogénea, cuando todos sus términos son del mismo grado. Ejemplos:

$$8a^5 - 7a^2b^3 + 9a^3b^2 - 4ab^4 + 5b^5$$
$$3x^2y - 5myz - 4w^3 + 7xz^2 + \frac{3}{7}xyz$$

2.6.4. EXPRESIÓN ALGEBRAICA HETEROGÉNEA

Una expresión algebraica es heterogénea, cuando todos sus términos son de grado diferente. Ejemplos:

$$4x^3 - 2x^2y^4 + 3xy^3 - 2y^3$$

2.6.5 POLINOMIO COMPLETO

Con la relación a una letra, los exponentes de la letra considerada van disminuyendo de uno en uno a partir del primer término hasta el cero inclusive, denominando a este último término “*término independiente*” con respecto a esa letra. Ejemplos:

$$3a^3 - 8a^2 + 10a - 15$$

$$x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 5x + 8$$

2.6.6 POLINOMIO ORDENADO

Según la letra ordenatriz, es aquel que se caracteriza porque los valores de los exponentes aumentan o disminuyen en forma sucesiva. Se puede ordenar un polinomio en forma ascendente o descendente, según se lo requiera. Ejemplos:

$2m^4 - 3m^3 - 5m^2 - m + 4$ polinomio ordenado en forma descendente.

$3 - a + a^2b - 3a^2b^2 + 10a^4b^3$ polinomio ordenado en forma ascendente con relación a la variable a .

2.7. VALOR NUMÉRICO

El valor numérico de un polinomio es el valor que se obtiene al reemplazar en las variables el valor numérico correspondiente y operarlos según se indique en el ejercicio.

Ejemplos:

Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones:

1. $9x$ si $x = 2$
2. $7x^2y^3$ si $x = 1$ y $y = -2$
3. $\frac{3x^2}{y} - \frac{1}{y} + \frac{8x}{y^3} + \sqrt{x+2}$ si $x = 0, y = 4$

Solución:

1. $9x$ si $x = 2$; $9 \cdot 2 = 18$
2. $7x^2y^3$ si $x = 1$ y $y = -2$; $7 \cdot 1^2 \cdot (-2)^3 = -56$
3. $\frac{3x^2}{y} - \frac{1}{y} + \frac{8x}{y^3} + \sqrt{x+2}$ si $x = 0, y = 4$;
$$\frac{3 \cdot 0^2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{8 \cdot 0}{4^3} + \sqrt{0+2} = \frac{0}{4} - \frac{1}{4} + \frac{0}{64} + \sqrt{2} = -\frac{1}{4} + \sqrt{2}$$

2.8. INTRODUCCIÓN DE TÉRMINOS EN SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Para introducir términos en signos de agrupación se debe observar lo siguiente:

1. Si se desea que el signo de agrupación tenga signo negativo al introducir los términos se cambia de signo a todos ellos. Ejemplo:
 $-3x - 6y + 4xy - 7 = -(3x + 6y - 4xy + 7)$

2. Si se desea que el signo de agrupación tenga signo positivo al introducir los términos se mantiene el signo de todos ellos. Ejemplo:

$$9xy - 4x - 7y + 20x^2y = (9xy - 4x - 7y + 20x^2y)$$

2.9. SUPRESIÓN DE SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Los signos de agrupación se suprimen o se eliminan de la siguiente manera:

- a) Si los signos de agrupación son precedidos por el signo (+), se suprime el signo de agrupación. Ejemplo:

$$(9x + 3y - 5xy - 20) = 9x + 3y - 5xy - 20$$

- b) Si los signos de agrupación son precedidos por el signo (-), se suprime el signo de agrupación cambiando de signo a cada uno de los términos que se encuentran dentro del signo de agrupación. Ejemplo:

$$-\left(8xy - \frac{5}{4x^3y^2} - \frac{x}{y} + 12\right) = -8xy + \frac{5}{4x^3y^2} + \frac{x}{y} - 12$$

2.10. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.10.1 SUMA O ADICIÓN

Para sumar dos o más expresiones algebraicas se escriben una a continuación de la otra con sus propios signos y luego se reducen términos semejantes.

Ejemplos:

1. Sumar:

$$9a^2b - 3ab + 9a - 3b - 7 \text{ con } 7a^2b + ab + 3b + 15$$

Solución:

$$\begin{array}{r} 9a^2b - 3ab + 9a - 3b - 7 \\ + 7a^2b + ab + 3b + 15 \\ \hline 16a^2b - 2ab + 9a + 8 \end{array}$$

2. Realizar la siguiente operación: $A + B$, si

$$A = 8xy - 2x + 2y - 8xy(2xy - 2x + 2y) - (2xy - 2x + 2y)$$

$$B = 3xy + (5xy + 3y) - 9xy - (3x + 3y) + (2x - 2y) + 3x$$

Solución:

$$\begin{aligned} A + B &= 8xy - 2x + 2y - 8xy(2xy - 2x + 2y) - (2xy - 2x + 2y) + 3xy + (5xy + 3y) - 9xy - \\ &\quad (3x + 3y) + (2x - 2y) + 3x \end{aligned}$$

Destruyendo paréntesis en las expresiones A y B

$$\begin{aligned} A + B &= 8xy - 2x + 2y - 16x^2y^2 + 16x^2y - \\ &16xy^2 - 2xy + 2x - 2y + 3xy + 5xy + 3y - \\ &9xy - 3x - 3y + 2x - 2y - 3x \end{aligned}$$

Operando términos semejantes:

$$A + B = 5xy + 2x - 2y - 16x^2y^2 + 16x^2y - 16xy^2$$

3. Sean:

$$A = 7x^2 - 8xy + 3y^2$$

$$B = -12x^2 - 11xy + 10y^2$$

$$C = \frac{x^2 - 15xy + 20y^2}{}$$

$$A + B + C = 4x^2 - 34xy + 33y^2$$

4. Sumar $A + B + C$, si:

$$A = \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$$

$$B = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{4}x + \frac{1}{9}$$

$$C = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{4}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{9}$$

Solución:

A+B+C:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3}x^3 \qquad \qquad + \frac{2}{4}x + \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{4}x - \frac{1}{9} \\ \hline x^3 + \frac{7}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \end{array}$$

2.10.2 RESTA O SUSTRACCIÓN

La resta o sustracción de dos expresiones algebraicas, llamadas minuendo y sustraendo es una operación que consiste en escribir el minuendo con sus propios signos, y a continuación el sustraendo con signos cambiados y se reducen términos semejantes, para obtener otra expresión llamada diferencia.

Minuendo es la expresión ubicada a partir de la palabra de...y

Sustraendo a partir de la palabra restar....

1. De $-4a^2b$ Restar $12a^2b$
 $-4a^2b - 12a^2b = -16a^2b$

2. Restar x^{a+1} De $-8a^{x+1}$
 $-8a^{x+1} - a^{x+1} = 9a^{x+1}$

3. De $3a + 2b$ Restar $5a - 8b$

$$\begin{array}{r} 3a + 2b \\ -5a + 8b \\ \hline -2a + 10b \end{array}$$

4. Restar: $14mn^2 + 5m^3 - 18$ de $5m^3 - 9n^3 + 6m^2n - 8mn^2$

$$\begin{array}{r} +5m^3 + 6m^2n - 8mn^2 - 9n^3 \\ -5m^3 + 21m^2n - 14mn^2 \quad + 18 \\ \hline +27m^2n - 22mn^2 - 9n^3 + 18 \end{array}$$

5. De: $7a^3 + 15a^2x + 18ax^2 - 4$ Restar $-10a^2x - 7 + 5ax^2 - 2x^3$
 Ordenando al minuendo en relación con la letra “a”

$$\begin{array}{r} 8ax^2 + 15a^2x + 7a^3 - 4 \\ -2x^3 - 5ax^2 + 10a^2x \quad + 7 \\ \hline -2x^3 + 3ax^2 + 25a^2x + 7a^3 + 3 \end{array}$$

6. Restar P(x) de Q(x)

$$P(x) = 5x^2 - 19x - 13x^3 - 18x^4 + 7$$

$$Q(x) = (5x^4 + 3x^2 - 18x + 6) - (3x^4 - 18x + 15x - 13)$$

Solución: Destruyendo paréntesis se tiene:

$$Q(x)-P(x)=5x^4+3x^2-18x+6-3x^4+18x-15x+13-5x^2+19x+13x^3+18x^4-7$$

Operando términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 2x^4 \qquad \qquad + 3x^2 - 15x + 13 \\ 18x^4 + 13x^3 - 5x^2 + 19x - 7 \\ \hline Q(x) - P(x) = 20x^4 + 13x^3 - 2x^2 + 4x + 6 \end{array}$$

2.10.3 MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Para multiplicar expresiones algebraicas se aplica lo siguiente según lo requiera el ejercicio.

1. Ley de signos:

$$+ \cdot + = +$$

$$- \cdot - = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot + = -$$

2. Multiplicación de expresiones que tienen igual base:

Se conserva la base y se suman los exponentes.

$$x \cdot x^2 = x^3$$

$$y^3 \cdot y^4 = y^7$$

3. Cuando se multiplican un monomio por un polinomio se aplica la propiedad distributiva.

Ejemplo:

$$9x(3x - 2y) = 9x \cdot 3x - 9x \cdot 2y = 27x^2 - 18xy$$

4. Si se multiplican dos polinomios se aplica la propiedad distributiva y la ley de los signos.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (2x - 3y + 7xy - 4)(x^2 - 2x + 1) \\ &= 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 2x + 2x \cdot 1 - 3y \cdot x^2 \\ &\quad + 3y \cdot 2x - 3y \cdot 1 + 7xy \cdot x^2 \\ &\quad - 7xy \cdot 2x + 7xy \cdot 1 - 4x^2 + 4 \cdot 2x \\ &\quad - 4 \cdot 1 \\ &= 2x^3 - 4x^2 + 2x - 3yx^2 + 6xy \\ &\quad - 3y + 7x^3y - 14x^2y + 7xy - 4x^2 \\ &\quad + 8x - 4 \\ &= 2x^3 - 8x^2 + 10x - 3yx^2 + 13xy - 3y + 7x^3y - \\ &\quad 14xx^2y - 4 \end{aligned}$$

2.10.4. DIVISIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

$$P(x) \overline{) D(x)}$$

$$R(x) \quad Q(x)$$

Dónde: P(x) se llama dividendo expresado en x o numerador

D(x): Divisor expresado en x o denominador

$Q(x)$: cociente expresado en x

$R(x)$: Residuo expresado en x (cuando la división no es exacta)

La división se realiza hasta cuando el grado de residuo es menor al grado del divisor.

Algoritmo de la división:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$
$$\frac{P(x)}{D(x)} = \frac{Q(x)D(x) + R(x)}{D(x)}$$

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Para dividir polinomios existen varios métodos:

- Método clásico de la división, de la Galera o división normal.
- Método de Ruffini.
- Método de los coeficientes indeterminados.

a) MÉTODO DE RUFFINI

Este método conocido también como división sintética se emplea para calcular el cociente y el residuo sin efectuar la división. Es válido solamente cuando se divide un polinomio ordenado $P(x)$ para un binomio de primer grado de la forma $ax \pm b$.

Cuando el coeficiente a es diferente de uno del binomio $ax \pm b$, se divide el cociente obtenido entre dicho coeficiente.

Ejemplos:

1. División mediante la regla de Ruffini.

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1; D(x) = x - 3$$

Solución:

El divisor $x - 3$ se iguala a 0 para obtener el valor crítico de x , así: $x - 3 = 0$, despejando $x = 3$.

El método de Ruffini utiliza solo los coeficientes del dividendo esto es:

$$1 - 3 + 1 - 2 + 1 - 1$$

Se realiza la multiplicación y/o suma, el último número es el residuo

$$\begin{array}{r}
 1 - 3 + 1 - 2 + 1 - 1 \\
 +3 \quad +3 \quad 0 + 3 + 3 + 12 \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad 1 \quad +1 \quad +4 \quad +11
 \end{array}$$

El método consiste en bajar al resultado el primer coeficiente luego se multiplica el número bajado por el valor crítico y este se coloca debajo del siguiente coeficiente y se opera en este caso $-3 + 3 = 0$ que es el

cero que aparece en el resultado, se continua con este proceso hasta llegar al último coeficiente.

El resultado se escribe empezando por la izquierda de los valores obtenidos como respuesta de las sumas y multiplicaciones este representa al $Q(x)$ que será de un grado menor al del dividendo así:

$Q(x) = 1x^4 + 0x^3 + 1x^2 + 1x + 4$; operando cada uno de los términos tendríamos:

$$Q(x) = x^4 + x^2 + x + 4$$

Como el último número de la operación es el 11 entonces:

$$R(x) = 11$$

Realicemos otro ejercicio:

Dividir $x^4 - 3x^2 + 4$ por $x-2$, utilizando el método de Ruffini.

El método de Ruffini obliga a que el polinomio dividendo debe ser completo esto es que tenga todos los términos desde la variable con el exponente mayor y hasta el término independiente si alguno de estos no tiene el polinomio el espacio se lo llena con cero así:

$x^4 - 3x^2 + 4 = x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 4$ de donde se obtienen los coeficientes:

$$1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 4$$

Igualando a cero el divisor: $x - 2 = 0$; $x = 2$ realizamos las sumas y multiplicaciones así:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 4 \\ 2 \quad \quad 2 \quad \quad 4 \quad 2 \quad 4 \\ \hline \end{array}$$

$$1 \quad 2 \quad \quad 1 \quad 2 \quad 8$$

$$Q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

$$R(x) = 8$$

2. Dividir $-4x^4 + 3x^3 - 6x^2 + x - 4$ por $-2x - 1$
 $-2x - 1 = 0$; $x = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r} -4 \quad 3 \quad -6 \quad 1 \quad -4 \\ -\frac{1}{2} \quad \quad 2 \quad -\frac{5}{2} \quad \frac{17}{4} \quad -\frac{21}{8} \\ \hline -4 \quad 5 \quad -\frac{17}{2} \quad \frac{21}{4} \quad -\frac{53}{8} \end{array}$$

El cociente se divide para -2

$$Q(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{17}{4}x - \frac{21}{8}$$

$$R(x) = -\frac{53}{8}$$

Este método se utilizará también para el factoro de polinomios, se toma el término independiente y se buscan sus factores y se prueban para todos y cada uno de ellos son factores del polinomio, los que nos dan después de aplicar el método de Ruffini cero.

Esto se puede mirar en el algoritmo de la división:

$P(x) = Q(x).D(x) + R(x)$; si $R(x)$ es igual a cero entonces nos quedan los factores el $P(x)$ que son $Q(x).D(x)$.

b) MÉTODO CLÁSICO DE LA DIVISIÓN O DIVISIÓN NORMAL

este método consiste en realizar la división entre el dividendo y el divisor dados, la división se termina cuando el residuo es de un grado menor al del divisor.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 1. \text{ Dividir } x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 3x^4 + 5 - x \text{ por } -5 + x^3 - 4x - 2x^2 \\
 \begin{array}{r}
 x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 5 \quad \left| \begin{array}{l} x^3 - 2x^2 - 4x - 5 \\ x^2 - x - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 5x^2} \\
 -x^4 + x^3 + 9x^2 - x \\
 \underline{x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 5x} \\
 -x^3 + 5x^2 - 6x + 5 \\
 \underline{+x^3 - 2x^2 - 4x - 5} \\
 3x^2 - 10x
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 Q(x) = x^2 - x - 1 \\
 R(x) = 3x^2 - 10x
 \end{array}$$

c) MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS (APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN Y RUFFINI)

Con este método se puede encontrar cualquier elemento del algoritmo de la división y se basa en la formación de ecuaciones para resolverlas como un sistema por los métodos ya conocidos (suma y resta, igualación, sustitución, determinantes etc.) Ejemplos:

1. Determine el cociente de dividir $5x^2 - 2x + 1$ por $x + 2$, si se conoce que su residuo es 25

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

$5x^2 - 2x - 1 = (x + 2)(ax + b) + 25$ (el factor que acompaña al divisor en x $(ax + b)$ debe ser de un grado tal que al multiplicarlo nos dé el mismo grado del dividendo así:

$$5x^2 - 2x - 1 = (x + 2)(ax + b) + 25$$

destruyendo paréntesis y agrupando se obtiene:

$$5x^2 - 2x - 1 = ax^2 + bx + 2ax + 2b + 25$$

$$5x^2 - 2x - 1 = ax^2 + x(b + 2a) + 2b + 25$$

Formando el sistema de ecuaciones mediante la igualación de términos que tienen la misma variable y el mismo exponente $5x^2 = ax^2$; $-2x = (b + 2a)x$; $-1 = 2b + 25$ se tiene lo siguiente:

$$5 = a \quad \longrightarrow \quad a = 5$$

$$-2 = b + 2a \quad \longrightarrow \quad b = -12$$

$$1 = 2b + 25$$

Reemplazando los valores obtenidos en el algoritmo de la división se obtiene que el divisor buscado es:

$$(ax + b) = 5x - 12$$

2. Encontrar el residuo de dividir $3x^3 + 5x^2 - 30x + 7$ por $x - 3$, use el algoritmo de la división.

$$3x^3 + 5x^2 - 30x + \overline{7 \quad x - 3}$$

$$R(x) \qquad Q(x)$$

$$P(x) = d(x)Q(x) + R(x)$$

$$3x^3 + 5x^2 - 30x + 7 = (x - 3)(Ax^2 + Bx + C) + D$$

$$3x^3 + 5x^2 - 30x + 7 = Ax^3 + Bx^2 + Cx - 3Ax^2 - 3Bx - 3C + D$$

$$3 = A \quad \longrightarrow \quad A = 3$$

$$5 = B - 3A \quad \longrightarrow \quad B = 14$$

$$-30 = C - 3B \quad \longrightarrow \quad C = 12$$

$$7 = -3C + D \quad \longrightarrow \quad D = 43$$

$$R(x) = 43$$

3. $P(x)$ dividido por $(x+1)$ de residuo 3, el cociente obtenido dividido por $x-1$ de residuo 4. Hallar el residuo de dividir $P(x)$ por $(x^2 - 1)$

$$\begin{array}{rcl} P(x) \overline{) (x+1)} & & \\ 3 & Q(x) \overline{) (x-1)} & P(x) \overline{) (x^2-1)} \\ & 4 \quad Q1(x) & R(x) \overline{) Q2(x)} \end{array}$$

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

$$P(x) = Q2(x)(x+1) + R(x)$$

$$P(x) = Q1(x)(x-1) + 4 \quad P(x) = [Q1(x)(x-1) + 4](x+1) + 3$$

$$P(x) = Q(x)(x+1) + 3 \quad P(x) = Q1(x)(x^2-1) + 4x+7$$

$$Q2(x)(x+1) + R(x) = Q1(x)(x^2-1) + 4x+7$$

$$R(x) = 4x+7$$

2.11. PRODUCTOS NOTABLES

Productos notables son expresiones típicas que tienen definiciones que se las debe conocer estas son.

Cuadrado de la suma y diferencia de un binomio.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Producto de la suma por la diferencia de un binomio, esto es la diferencia de cuadrados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Cuadrado de un trinomio

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Cubo de un binomio

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Producto de dos binomios que tienen un término común.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$$

Además, se deben particularizar los siguientes productos notables:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \dots b^{n-1}) = a^n + b^n$$

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \dots b^{n-1}) = a^n - b^n$$

Aplicaciones de los productos notables:

1. Utilizando el productor notable determinar el valor de: $(2x^2 - 4 - 3x)^2$

Solución:

$$\begin{aligned}(2x^2 - 4 - 3x)^2 &= (2x^2)^2 + (-4)^2 + (-3x)^2 + \\ &+ 2(2x^2)(-4) + 2(2x^2)(-3x) + 2(-4)(-3x) \\ (2x^2 - 4 - 3x)^2 &= 4x^4 + 16 + 9x^2 - 16x^2 - 12x^3 + 24x \\ (2x^2 - 4 - 3x)^2 &= 4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 24x + 16\end{aligned}$$

2. Utilizando el productor notable determinar el valor de: $(0,1m^3 - \frac{1}{2}n^4)^2$

Solución:

$$\begin{aligned}(0,1m^3 - \frac{1}{2}n^4)^2 &= (\frac{1}{10}m^3 - \frac{1}{2}n^4)^2 \\ (0,1m^3 - \frac{1}{2}n^4)^2 &= (\frac{1}{10}m^3)^2 - 2\left(\frac{1}{10}m^3\right)\left(\frac{1}{2}n^4\right) + (\frac{1}{2}n^4)^2 \\ \left(0,1m^3 - \frac{1}{2}n^4\right)^2 &= \frac{1}{100}m^6 - \frac{1}{10}m^3n^4 + \frac{1}{4}n^8\end{aligned}$$

3. Utilizando el productor notable determinar el valor de: $\left(-\frac{5}{3} + x^2y^3\right)^2$

Solución:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{5}{3} + x^2y^3\right)^2 &= \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{3}\right)(x^2y^3) + (x^2y^3)^2 \\ \left(-\frac{5}{3} + x^2y^3\right)^2 &= \frac{25}{9} - \frac{10}{3}x^2y^3 + x^4y^6\end{aligned}$$

2.12. FACTORIZACIÓN

Factorar un polinomio es expresarlo como el producto de otros polinomios tales que al multiplicarlos se reproduce el polinomio original. Ejemplo:

$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$ cómo se puede observar el polinomio de la izquierda es una diferencia de cuadrados, aplicando un producto notable se obtiene la respuesta indicada.

Se debe observar que el polinomio está completamente factorado cuando en sus factores se obtienen expresiones denominadas primas, es decir que son divisible para uno y para sí mismas.

De igual manera se factoran los números lo mismo que al descomponerlos se obtienen todos sus factores primos. Ejemplo:

Encontrar los factores o factorar el número 140.

140	
70	2
35	2
7	5
1	7

Entonces el numero 140 factorado quedaría así:

$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$. 1. nótese que los factores del 140 TODOS son números primos.

2.12.1 CASOS DE FACTORIZACIÓN

2.12.2 FACTOR COMÚN

Consiste en observar si en cada uno de los términos del polinomio, existe uno o más factores que se repiten estos pueden ser monomios o polinomios. Ejemplos:

1. Factorizar o transformar en multiplicación:

$$12x^4y^3 - 6x^3y^5w^3 + 54x^2y^7w^5pq^6$$

Observando a cada uno de los términos del polinomio, se determina que $6x^2y^3$ es el **factor común monomio** o máximo común divisor de los términos.

Para factorizar $12x^4y^3 - 6x^3y^5w^3 + 54x^2y^7w^5pq^6$ el primer factor de la respuesta es el **factor común monomio** o máximo común divisor o sea el $6x^2y^3$, y el segundo factor se obtiene dividiendo cada término del polinomio para el **factor común**, así:

$$12x^4y^3 - 6x^3y^5w^3 + 54x^2y^7w^5pq^6 = 6x^2y^3(2x^2 - xy^2w^3 + 9y^4w^5pq^6)$$

2. Factorizar: $(x + 5y)(x + 2) - ey(x + 2) + 7(x + 2)$
 Se observa que $(x + 2)$ es el **factor común polinomio** o máximo común divisor de los términos dados

Para factorizar $(2 + 5y)(x + 2) - 3y(x + 2) + 7(x + 2)$, se escribe el primer factor que es el **factor común polinomio**, es decir: $(x + 2)$ y el segundo factor se obtiene de igual manera dividiendo el polinomio para el factor común polinomio, así:

$$\begin{aligned}(2 + 5y)(x + 2) - 3y(x + 2) + 7(x + 2) \\ = (x + 2)(2 + 5y - 3y + 7)\end{aligned}$$

Finalmente se reduce términos semejantes en el segundo factor.

$$\begin{aligned}(2 + 5y)(x + 2) - 3y(x + 2) + 7(x + 2) \\ = (x + 2)(2y + 9)\end{aligned}$$

3. Factorizar $2ax - ay + 4bx - 2by$

Analizando al polinomio se determina que no existe factor común y que además posee 4 términos, mismo que pueden **agruparlos** de 2 en 2 con la finalidad de obtener un factor común, así:

$$\begin{aligned}2ax - ay + 4bx - 2by \\ = (2ax - ay) + (4bx - 2by)\end{aligned}$$

Luego se obtiene el factor común en cada paréntesis:
 $2ax - ay + 4bx - 2by = a(2x - y) + 2b(2x - y)$, se observa un factor común polinomio que es $(2x - y)$, para finalmente proceder como en el ejemplo anterior.

$$2ax - ay + 4bx - 2by = (2x - y)(a + 2b)$$

2.12.3 BINOMIOS

2.12.4 DIFERENCIA DE CUADRADOS

Aplicando el producto notable: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ se obtienen los factores deseados, para obtener los términos de los factores se extraen las raíces cuadradas de las cantidades dadas en el polinomio, como se mira en el siguiente ejemplo:

1. factorar: $x^2 - 4$

Solución:

$$\sqrt{x^2} = x ; \sqrt{4} = 2$$

Aplicando el producto notable anterior se tendría que
 $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

2.12.5 SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS

Para factorar una suma o diferencia de cubos se aplica los productos notables:

$$\text{➤ } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\text{➤ } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejercicios:

1. Descomponer en factores: $27a^3 - b^3$:

Solución:

Se extraen las raíces cubicas de las bases del polinomio así:

$$\sqrt[3]{27a^3} = 3a ; \sqrt[3]{b^3} = b$$

Se aplica el producto notable de la diferencia de cubos:

$$a^3 - b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$$

Sería: $27a^3 - b^3 = (3a)^3 - (b)^3 = (3a - b)\{(3a)^2 + (3a)(b) + (b)^2\}$,

destruyendo paréntesis y operando se tendría:

$$27a^3 - b^3 = (3a - b)(9a^2 + 3ab + b^2)$$

2. Descomponer en factores $\frac{1}{64}a^9 + b^6$:

Solución:

Las raíces cubicas son $\frac{1}{4}a^3$ y b^2 respectivamente.

Aplicando el producto notable su respuesta sería:

$$\frac{1}{64}a^9 + b^6 = \left(\frac{1}{4}a^3 + b^2\right)\left(\frac{1}{16}a^6 - \frac{1}{4}a^3b^2 + b^4\right)$$

2.12.6 TRINOMIOS

Se llama un trinomio al polinomio que tiene tres términos, dentro de este caso estarían los trinomios cuadrados perfectos (Un trinomio ordenado con relación a una variable, el primero y el tercer término son cuadrados perfectos (tienen raíz cuadrada exacta) y positivos, y el segundo término es el doble producto de sus raíces), en este caso se utiliza para su factorización el producto notable de la suma y/o diferencia de un binomio elevado al cuadrado.

Si el trinomio no es cuadrado perfecto se utiliza el método de Ruffini también llamado como método de evaluación (este método solo encuentra factores de primer grado).

2.12.7 CRITERIO PARA FACTORIZAR UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Ejemplo:

1. Factorar: $x^2 - 10xy + 25y^2$:

Solución:

Se extraen las raíces cuadradas de los términos extremos del trinomio:

$$\sqrt{x^2} = x ; \sqrt{25y^2} = 5y$$

Se verifica el valor del término intermedio realizando el doble producto de las raíces obtenidas esto es:

2. $x \cdot 5y = 10xy$ que es el mismo valor del polinomio dado por lo tanto es un trinomio cuadrado perfecto, para su solución aplicamos el producto notable:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \text{ entonces:}$$

$$x^2 - 10xy + 25y^2 = (x - 5y)^2$$

2. Factorar: $(x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$

Se procede de igual forma que en el ejercicio anterior:

$$(x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 = (x + y + z)^2$$

2.12.8. CRITERIO PARA FACTORIZAR UN TRINOMIO DE LA FORMA $x^2 + bx + c$, O TRINOMIO SIMPLE

Factorizar un trinomio de la forma simple, implica regresar al producto de dos binomios que tienen un término común, para cual se procede así:

- Se extrae la raíz cuadrada del primer término, luego de haber ordenado al polinomio y se escribe como primer término de los factores a obtener.

- El signo del primer paréntesis corresponde siempre el signo del segundo término.
- El signo del segundo paréntesis está dado por la ley de signos entre el segundo y tercer término del trinomio que interviene.
- Se descompone en factores al término independiente y se buscan un par de números entre los factores que multiplicados nos den el término independiente y que al sumarlos o restarlos nos dé el coeficiente del término intermedio.

Ejemplos:

1. Factorizar: $y^2 - 8y + 15$

Solución:

$$\sqrt{y^2} = y$$

Los factores de 15 son $\pm 5, \pm 3, \pm 1$

Los números de los factores buscados serían: 5 y 3 ya que $5 \cdot 3 = 15$ y $5 + 3 = 8$ que es el coeficiente del término intermedio.

Por lo tanto, el resultado sería:

$$y^2 - 8y + 15 = (y - 5)(y - 3)$$

2. Factorar: $x^2 - 4xy - 21y^2$

Se procede de igual forma:

$$x^2 - 4xy - 21y^2 = (x - 7y)(x + 3y)$$

2.12.9. TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$, O TRINOMIO COMPUESTO.

Es un trinomio cuyo coeficiente del primer término es diferente de uno, en este caso el proceso para factorar consiste en.

- ✓ Multiplicar el coeficiente del primer término del trinomio por el término independiente, se encuentra los factores del número que se obtuvo.
- ✓ Se abren los dos paréntesis, el primer término de cada paréntesis es el coeficiente multiplicado por la raíz del primer término del polinomio dado y el segundo termino de los factores es la combinación de los números que cumplen la condición que al multiplicarlos y/o sumarlos nos den los números deseados.
- ✓ Como se multiplico por una cantidad determinada al final se divide los factores para la misma cantidad que se multiplico, se simplifica y se escribe la respuesta.

Ejemplos:

1. Factorar: $6x^2 - x - 2$

Solución:

➤ Se multiplica al término independiente por 6

$$6 \cdot -2 = -12$$

➤ Se buscan los factores del -12 ; estos son $\pm 4, \pm 3, \pm 1$

➤ Se buscan las combinaciones del par de números que multiplicados nos den -12 y sumados o restados nos den -1 estos números serían el 4 y el -3 .

➤ Escribiendo el resultado sería:

$$6x^2 - x - 2 = \frac{2(3x - 2)3(2x + 1)}{6 = 2 \cdot 3}$$

$$6x^2 - x - 2 = \frac{\cancel{2}(3x-2)\cancel{3}(2x+1)}{\cancel{2}\cancel{3}}$$

Simplificando tenemos:

$$6x^2 - x - 2 = (3x - 2)(2x + 1)$$

2. Factorar: $12x^2 - 52x + 35$

De igual forma que en el ejercicio anterior, el coeficiente de x^2 es 12, por lo tanto, es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, para expresar en factores se procede así:

$$12x^2 - 52x + 35 = \frac{(12-)(12x-)}{12}$$

A continuación, determinar dos números que sumados de **-52** y multiplicados **420**

$$12x^2 - 52x + 35 = \frac{(12 - 42)(12x - 10)}{12}$$

Se obtiene los factores comunes y se simplifica

$$12x^2 - 52x + 35 = (2x - 7)(6x - 5)$$

2.12.10. FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO DE LA
FORMA $ax^2 + bx + c$, O TRINOMIO
COMPUESTO, POR EL CRITERIO DE ASPA.

El método de ASPA se emplea para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, y se procede de la forma como se indica en los siguientes ejemplos:

1. Factorizar: $8x^2 - 2x - 3$

Dado el trinomio $8x^2 - 2x - 3$, por éste método se procede así:

- ✓ Descomponer en factores al primer y tercer término a los cuales llamamos términos fijos.

$$8x^2 - 2x - 3$$

$$\begin{array}{cc} 4x & -3 \\ 2x & 1 \end{array}$$

- ✓ Se efectúa el producto de los factores primos es ASPA, y para obtener el segundo término, se suman estos productos, así:

$$\begin{array}{cc} 8x^2 - 2x - 3 \\ 4x \quad \nearrow \quad -3 \\ 2x \quad \searrow \quad 1 \end{array}$$

$$2x(-3) = -6x$$

$$4x(1) = 4x$$

$$-6 + 4 = -2$$

$$\text{Entonces: } 8x^2 - 2x - 3 = (4x - 3)(2x + 1)$$

2. Factorizar:

$$6x^2 - 23x + 20$$

descomponiendo al coeficiente 6 en sus factores, estos son $\pm 3, \pm 2, \pm 1$.

Descomponiendo al termino independiente 20 en sus factores se tiene: $\pm 5, \pm 4, \pm 2, \pm 1$: y escribiendo con la regla del ASPA se tiene:

$$6x^2 - 23x + 20$$

$$\begin{array}{cc} 3x & \nearrow -4 \\ 2x & \searrow -5 \end{array}$$

Operando tenemos $2x(-4) = -8x$ y $3x(-5) = -15x$

Comprobando el término intermedio: $-8x - 15x = -23x$ por lo tanto los factores son:

$$6x^2 - 23x + 20 = (3x - 4)(2x - 5)$$

2.12.11. POLINOMIOS QUE NO SON FACTORIZABLES DIRECTAMENTE

Para factorizar aquellas expresiones algebraicas que no cumplen directamente con los criterios de: factor común, binomios o trinomios, se procede primeramente a buscar algoritmos matemáticos con la finalidad de expresarlos en los criterios anteriores, de no ser factible se procede a utilizar el método de Ruffini.

Para factorizar utilizando el método de Ruffini, es necesario seguir los siguientes pasos:

- a) El término independiente se descompone en factores.

- b) Mediante la división por Ruffini, se realizan diferentes ensayos para cada uno de los factores, hasta obtener de residuo cero.
- c) El primer factor es la variable menos el divisor.
- d) El segundo factor es el polinomio cociente.
- e) Finalmente se factoriza el polinomio cociente, de ser posible.

Ejercicios:

1. Factorizar: $x^4 - x^3 - 6x^2 - 2x - 4$

Para resolver por el método de Ruffini se buscan los factores del término independiente:

Los factores de -4 son $\pm 4, \pm 2, \pm 1$.

Se realizan el proceso de división con el método de Ruffini, señalando que son factores los que dan residuo cero (0).

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 1 & -1 & -6 & -2 & -4 & -2 \\
 & -2 & +6 & 0 & +4 & \\
 \hline
 1 & -3 & 0 & -2 & 0 &
 \end{array}$$

el polinomio queda factorado de la siguiente manera:

$$x^4 - x^3 - 6x^2 - 2x - 4 = (x + 2)(x^3 - 3x^2 - 2)$$

2. Factorizar: $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

$$\begin{array}{rrrr}
 & 1 & -5 & +7 & -3 \\
 1 & & +1 & -4 & +3 \\
 \hline
 & 1 & -4 & +3 & 0
 \end{array}$$

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 1)(x^2 - 4x + 3)$$

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 1)(x - 3)(x - 1)$$

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 1)^2(x - 3)$$

3. Factorizar: $x^2 - x - 2$

Descomponiendo el término independiente en sus factores.

Los factores de -2 son $\pm 2, \pm 1$.

$$\begin{array}{rrr}
 & 1 & -1 & -2 \\
 -1 & & -1 & +2 \\
 \hline
 & 1 & -2 & 0
 \end{array}$$

Los factores son: $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$

2.13. EXPRESIONES RACIONALES

2.13.1 FRACCIÓN ALGEBRAICA

El cociente entre dos polinomios se denomina fracción algebraica.

A las expresiones fraccionarias se denota por:

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ con } Q(x) \neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{5x^2 + 8x}{7x^2 + 2x - 1}$$

2.13.2 SIGNOS DE UNA FRACCIÓN ALGEBRAICA

Una fracción algebraica negativa se puede escribir de una de la siguiente manera y todas son iguales o equivalentes:

$$\frac{-P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{-Q(x)} = -\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ en todos estos casos siempre } Q(x) \neq 0$$

A su vez una fracción positiva se puede expresar de una de las siguientes maneras que son equivalentes

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-P(x)}{-Q(x)} = -\frac{-P(x)}{Q(x)} = -\frac{P(x)}{-Q(x)} \text{ en todos estos casos siempre } Q(x) \neq 0$$

2.14. CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS

La fracción racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede clasificar en:

2.14.1 FRACCIÓN PROPIA

Cuando el grado del polinomio numerador es menor que el grado del polinomio denominador.

Ejemplo:

$$\frac{4x^2 - 23x + 9}{12x^3 - 2x^2 + 5x + 3}$$

2.14.2 FRACCIÓN IMPROPIA

La fracción es impropia, si el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador. Ejemplo:

$$\frac{2x^4 - 10x^2 - 9x + 5}{2x^2 + 7x + 12}$$

2.14.3 FRACCIONES HOMOGÉNEAS

Son aquellas fracciones que tienen denominadores iguales. Ejemplo:

$$\frac{3x^2y - 3}{x + 8y}; \frac{11x^2 + 26xy - 18}{x + 8y}$$

2.14.4 FRACCIONES HETEROGÉNEAS

Si en dos o más fracciones algebraicas, por lo menos una de ellas, posee distinto denominador, se llama fracciones heterogéneas.

Ejemplo:

$$\frac{6x^2 - 12x + 3}{21x^2 + x - 6}; \quad \frac{2x^2 + x - 2}{11x^3 - 15x^2 - 2x + 8}$$

2.14.5 FRACCIONES EQUIVALENTES

Las fracciones equivalentes son aquellas que representan igual cantidad, aunque tengan numeradores y denominadores diferentes. Se pueden conseguir multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número. Para verificar si dos fracciones son equivalentes, se pueden multiplicar sus productos en cruz; si los resultados son los mismos, entonces las fracciones son equivalentes.

Ejemplo:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 4} = \frac{(x + 1)^2}{3x + 4} = \frac{5(x + 1)^2}{5(3x + 4)}$$

2.14.6 FRACCIONES IRREDUCIBLES

Son aquellas expresiones que no tienen factores comunes.

Ejemplo:

$$\frac{3}{x-2}, \frac{x+2}{x^2+y^2}$$

2.15. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Simplificar una fracción consiste en transformarle, una fracción dada en otra equivalente, de tal manera que se obtenga una fracción irreducible.

Cuando se requiere reducir o simplificar a fracción algebraica a su mínima expresión o sea a fracción irreducible, se procede de la siguiente manera:

- ✓ Factorizamos completamente los polinomios, tanto del numerador como del denominador.
- ✓ Determinamos los factores que se repiten en el numerador y en el denominador y a estos los simplificamos.

Ejercicios:

1. Simplificar la expresión:

$$\frac{12xy^6z^5}{30x^2y^5z^4}$$

Solución:

Se simplifican los valores numéricos y las variables sin importar el exponente al cual están elevados recordando que:

- Cuando se multiplican expresiones que tienen igual base y un exponente, se conserva la base y se suman los exponentes.

$$x^2 \cdot x^4 = x^6$$

- Cuando se dividen expresiones que tienen igual base y un exponente se conserva la base y se restan los exponentes.

$$\frac{x^5}{x^3} = x^2$$

- Además, recordar que se puede transformar potencias positivas a negativas y viceversa así:

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto, simplificando la expresión $\frac{12xy^6z^5}{30x^2y^5z^4}$ sería:

$$\frac{2}{5}x^{-1}yz = \frac{2yz}{5x}$$

2. Simplificar

$$\frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 + 5x - 42}$$

Se factoriza al numerador y al denominador y se simplifican los términos que se repiten en el numerador y denominador.

$$\frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 + 5x - 42} = \frac{(x - 6)(x + 1)}{(2x - 7)(x + 6)}$$

$$\frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 + 5x - 42} = \frac{(x - 1)}{(2x - 7)}$$

3. Simplificar

$$\frac{2x^3 - 11x^2 - 16x + 105}{2x^2 - 17x + 35}$$

Factorizamos los polinomios del numerador y del denominador con el método de Ruffini.

	2	-11	-16	105
5		10	-5	-105
	2	-1	-21	0

$$= (2x^2 - x - 21)$$

$$= (2x - 7)(x + 3)$$

$$\frac{2x^3 - 11x^2 - 16x + 105}{2x^2 - 17x + 35} = \frac{\cancel{(x-5)}\cancel{(2x-7)}(x+3)}{\cancel{(2x-7)}\cancel{(x-5)}}$$

simplificando los factores $(x - 5)$ y $(2x - 7)$ del numerador y denominador se tiene:

$$\frac{2x^3 - 11x^2 - 16x + 105}{2x^2 - 17x + 35} = (x + 3)$$

4. Simplificar:

$$\frac{(x - 2)(2x^3 - 9x^2 + 13x + 9)}{x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 39x - 54}$$

Factorizar numerador y denominador con el método de Ruffini:

1	-4	-2	39	-54
2	2	-4	-12	54
1	-2	-6	27	0

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 39x - 54 = (x - 2)(x + 3)(x^2 - 5x + 9)$$

$$(2x^3 - 9x^2 + 13x + 9) = (2x + 1)(x^2 - 5x + 9)$$

Luego de haber factorizado, se reemplaza en la fracción original y se tiene la siguiente fracción equivalente.

$$\frac{(x-2)(2x^3-9x^2+13x+9)}{x^4-4x^3-2x^2+39x-54} = \frac{(x-2)(2x+1)(x^2-5x+9)}{(x-2)(x+3)(x^2-5x+9)}$$

Se simplifica los factores comunes.

$$\frac{(x-2)(2x^3-9x^2+13x+9)}{x^4-4x^3-2x^2+39x-54} = \frac{\cancel{(x-2)}(2x+1)\cancel{(x^2-5x+9)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)\cancel{(x^2-5x+9)}}$$

La fracción equivalente es:

$$\frac{2x+1}{x+3}$$

5. Simplificar:

$$\frac{(2x-3)(x-5)(x^2+10x+21)}{x^4+13x^3+41x^2-37x-210}$$

Se factoriza los polinomios del numerador y denominador.

1	13	41	-37	-210
-3		-3	-30	-33
				+210

1	10	11	-70	0
-7		-7	-21	+70

1	3	-10
---	---	-----

$$= (x^2 + 3x - 10)$$

$$(x^4 + 13x^3 + 41x^2 - 37x - 210) = (x + 3)(x + 7)(x + 5)(x - 2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-5)(x^2+10x+21)}{x^4+13x^3+41x^2-37x-210} = \frac{(2x-3)(x-5)(x+7)(x+3)}{(x+3)(x+7)(x+5)(x-2)}$$

Se simplifican los factores comunes.

$$\frac{(2x-3)(x-5)(x^2+10x+21)}{x^4+13x^3+41x^2-37x-210} = \frac{(2x-3)(x-5)(\cancel{x+7})(\cancel{x+3})}{(\cancel{x+3})(\cancel{x+7})(x+5)(x-2)}$$

$$= \left(\frac{2x-3}{x-2} \right) \left(\frac{x-5}{x+5} \right)$$

2.16. OPERACIONES CON FRACCIONES

2.16.1 SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Para sumar y/o restar fracciones se sigue los siguientes criterios:

- ✚ Si es posible se procede a simplificar las fracciones dadas, previamente factorizando numeradores y denominadores.
- ✚ De no ser posible, se factoriza únicamente los denominadores.
- ✚ Escribimos el mínimo común múltiplo, y lo escribimos como denominador.
- ✚ El mínimo común múltiplo se divide para cada denominador y el cociente se multiplica por su correspondiente numerador.
- ✚ Debemos recordar que:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad ; \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Esta propiedad de los números reales se aplica también a la suma y resta de fracciones.

✚ Se efectúan las operaciones y se reducen términos semejantes en el numerador.

✚ Finalmente se simplifica la fracción de ser posible.
Ejemplos:

1. Sumar: $\frac{x}{a} + \frac{3x}{b}$

Solución:

$$\frac{x}{a} + \frac{3x}{b} = \frac{bx + (3x)a}{ab} = \frac{bx + 3ax}{ab} = \frac{x(b + 2a)}{ab}$$

2. Operar: $\frac{5}{x-2} - \frac{6}{x-3}$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{5}{x-2} - \frac{6}{x-3} &= \frac{5(x-3) - 6(x-2)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{5x - 15 - 6x + 12}{x^2 - 5x + 6} \\ &= \frac{-x - 3}{x^2 - 5x + 6} \end{aligned}$$

2.16.2. MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

Para multiplicar fracciones, se procede de la siguiente manera:

- ✓ Se transforma en factores, los polinomios de los numeradores y denominadores.
- ✓ Se simplifican los factores comunes, entre los numeradores y denominadores.
- ✓ Se multiplican entre si las expresiones que quedan en los numeradores y denominadores respectivamente.

Ejemplos:

2. Multiplicar: $\frac{x^3y}{3mn} \times \frac{5m^2}{2xy^4} \times \frac{8y^2}{7m} \times 5$

Solución:

Las multiplicaciones se pueden realizar de **dos formas**.

Primera. - Se multiplican los numeradores y denominadores para luego simplificarlos así:

$$\frac{x^3y}{3mn} \times \frac{5m^2}{2xy^4} \times \frac{8y^2}{7m} \times 5 = \frac{200x^3y^3m^2}{42m^2nxy^4}$$

Simplificando los valores numéricos y los literales que se repiten en el numerador y denominador tenemos.

$$\frac{x^3y}{3mn} \times \frac{5m^2}{2xy^4} \times \frac{8y^2}{7m} \times 5 = \frac{200x^3y^3m^2}{42m^2nxy^4} = \frac{100x^2}{21ny}$$

Segunda. – se simplifican previamente los términos comunes de los numeradores y denominadores y luego se multiplican las fracciones así:

$$\frac{\cancel{x^3}\cancel{y}}{3\cancel{m}n} \times \frac{5\cancel{m^2}}{2\cancel{x}y^4} \times \frac{8\cancel{y^2}}{7\cancel{m}} \times \frac{5}{1} = \frac{200x^2}{42ny} = \frac{100x^2}{21ny}$$

3. Multiplicar: $\frac{x^2+2x-15}{x^2-x-2} \times \frac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$

Solución:

Descomponiendo en factores cada una de las fracciones dadas y simplificando tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x-15}{x^2-x-2} \times \frac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8} &= \frac{(x+5)(x-3)}{(x-2)(\cancel{x+1})} \times \frac{(\cancel{x-4})(\cancel{x+1})}{(\cancel{x-4})(x-2)} \\ &= \frac{(x+5)(x-3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2+2x-15}{x^2-4x+4} \end{aligned}$$

2.16.3 DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para dividir fracciones algebraicas, se transforman a la división de fracciones en multiplicación, para ello se multiplica en cruz las fracciones dadas y se resuelve de la misma manera que en la multiplicación de fracciones recordando que:

$$\frac{x}{y} \div \frac{m}{n} = \frac{x \cdot n}{y \cdot m}$$

Ejemplo:

1. Dividir: $\frac{x^2-x-6}{x^2+6x+8} \div \frac{x^2+2x-15}{x^2+3x-18}$

Solución:

Transformamos esta división en producto de divisiones multiplicando en cruz esto es:

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+6x+8} \div \frac{x^2+2x-15}{x^2+3x-18} = \frac{(x^2-x-6)(x^2+3x-18)}{(x^2+6x+8)(x^2+2x-15)}$$

Factoramos los numeradores y denominadores:

$$\frac{(x^2-x-6)(x^2+3x-18)}{(x^2+6x+8)(x^2+2x-15)} = \frac{(x-3)(x+2)(x-3)(x+6)}{(x+4)(x+2)(x+5)(x-3)}$$

Simplificando sería:

$$\frac{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+2)}(x-3)(x+6)}{(x+4)\cancel{(x+2)}(x+5)\cancel{(x-3)}} = \frac{(x-3)(x+6)}{(x+4)(x+5)}$$

2.16.4 FRACCIÓN COMPLEJA O COMPUESTA

Una fracción compuesta, es aquella que tiene fracciones en el numerador y denominador o en ambos. Ejemplos:

$$\frac{\frac{7x-1}{x+3}}{9x+7} \quad ; \quad \frac{\frac{x+y}{x-3y}}{\frac{x-y}{x}}$$

Para resolver fracciones compuestas:

- ✓ Se reduce el numerador y denominador a fracciones simples, utilizando la definición: se multiplican extremos con extremos y medios con medios así:

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{m}{n}} = \frac{x \cdot n}{y \cdot m}$$

- ✓ Al resultado obtenido se lo resuelve con la multiplicación de fracciones.

Ejercicios:

1. Simplificar la siguiente expresión: $\frac{\frac{7x-1}{x+3}}{9x+7}$

Solución:

Completamos la fracción en el denominador del ejercicio colocando como denominador al número uno:

$$\frac{\frac{7x-1}{x+3}}{\frac{9x+7}{1}}$$

Multiplicando extremos con extremos y medios con medios se tiene:

$$\frac{(7x-1)(1)}{(x+3)(9x+7)}$$

Realizando las operaciones:

$$\frac{(7x-1)(1)}{(x+3)(9x+7)} = \frac{(7x-1)}{(x+3)(9x+7)} = \frac{7x-1}{9x^2+34x+21}$$

2. Simplificar la siguiente expresión: $\frac{\frac{x+y}{x-3y}}{\frac{x-y}{x}}$

Solución:

Multiplicamos extremos con extremos y medios con medios:

$$\frac{\frac{x+y}{x-3y}}{\frac{x-y}{x}} = \frac{(x+y)(x)}{(x-3y)(x-y)}$$

Operando lo anterior sería:

$$\frac{\frac{x+y}{x-3y}}{\frac{x-y}{x}} = \frac{(x+y)(x)}{(x-3y)(x-y)} = \frac{x^2 + xy}{x^2 - 4xy + 3y^2}$$

3. Simplificar la siguiente expresión: $\frac{\frac{m+n}{m} - \frac{m-n}{n}}{\frac{m+n}{m} + \frac{m-n}{n}}$

Solución:

Operando el numerador de la fracción compuesta:

$$\frac{m+n}{n} - \frac{m-n}{m} = \frac{m(m+n) - n(m-n)}{nm}$$

Destruyendo los paréntesis:

$$= \frac{m^2 + mn - mn + n^2}{nm} = \frac{m^2 + n^2}{nm}$$

Operando el denominador de la fracción compuesta:

$$\frac{m+n}{m} + \frac{m-n}{n} = \frac{n(m+n) + m(m-n)}{mn}$$

Destruyendo los paréntesis:

$$= \frac{nm + n^2 + m^2 - mn}{mn} = \frac{n^2 + m^2}{mn}$$

Reemplazando estas respuestas parciales en la fracción original sería:

$$\frac{\frac{m+n}{n} - \frac{m-n}{m}}{\frac{m+n}{m} + \frac{m-n}{n}} = \frac{\frac{m^2n^2}{nm}}{\frac{n^2m^2}{nm}}$$

Se simplifica el numerador con el denominador por ser iguales:

$$\frac{\frac{m+n}{n} - \frac{m-n}{m}}{\frac{m+n}{m} + \frac{m-n}{n}} = \frac{\cancel{nm}}{\cancel{n^2m^2}} = 1$$

2.16.5 EXPRESIÓN MIXTA DE UNA FRACCIÓN

Si el grado del numerador de una fracción es igual o mayor que el grado del denominador, ésta fracción puede transformarse por división de sus términos en una expresión mixta.

La expresión mixta de un polinomio queda expresada así:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Ejercicios:

1. Transformar la expresión: $\frac{x^3 - x^2 + x + 2}{x^2 + 5}$ en una expresión mixta.

Solución:

Dividamos ésta expresión:

$$\begin{array}{r}
 \cancel{x^3} - x^2 + x + 2 \quad | \quad x^2 + 5 \\
 \hline
 -\cancel{x^3} \quad -5x \quad \quad x - 1 \\
 \hline
 0 \quad -\cancel{x^2} - 4x + 2 \\
 \quad \quad \quad \cancel{x^2} \quad \quad + 5 \\
 \hline
 \quad \quad 0 \quad -4x \quad + 7
 \end{array}$$

La expresión mixta sería entonces:

$$\frac{x^3 - x^2 + x + 2}{x^2 + 5} = x - 1 + \frac{-4x + 7}{x^2 + 5}$$

2. Expresar en forma mixta, la siguiente fracción:

$$\frac{m^4 - 3m^3 - 3m^2 + 10}{(m + 1)^2(m - 3)}$$

Solución:

Antes de dividir, se debemos multiplicar los factores del denominador.

$$\begin{aligned}
 (m + 1)^2(m - 3) &= (m^2 + 2m + 1)(m - 3) = \\
 &= m^3 - m^2 - 5m - 3
 \end{aligned}$$

La fracción es:

$$\frac{m^4 - 3m^3 - 3m^2 + 10}{m^3 - m^2 - 5m - 3}$$

Dividimos:

$m^4 - 3m^3 - 3m^2 + 10$	$m^3 - m^2 - 5m - 3$
$-m^4 + m^3 + 5m^2 + 3m$	$m - 2$
$-2m^3 + 2m^2 + 3m + 10$	
$2m^3 - 2m^2 - 10m - 6$	
$-7m + 4$	

La expresión mixta sería:

$$\frac{m^4 - 3m^3 - 3m^2 + 10}{(m+1)^2(m-3)} = m - 2 + \frac{-7m+4}{m^3 - m^2 - 5m - 3}$$

2.17. ECUACIONES LINEALES Y SISTEMA DE ECUACIONES

2.17.1. ECUACIONES LINEALES

Una ecuación lineal es aquella que tiene la forma:

$$Ax + B = 0 \quad ; \quad \text{donde } (A \text{ y } B) \in \mathbb{R}$$

Nótese que el exponente de la variable x es igual a 1.

Ejemplos de ecuaciones lineales:

$$5x + 7 = 0$$

$$-\frac{1}{3}x + 5 = 0$$

$$\frac{7}{3x - 2} = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2x - 3$$

$$5xy - 3x = 2 + 7y$$

Para resolver estas ecuaciones se utilizan la transposición de términos, esto es pasar de un miembro de la ecuación al otro miembro de la ecuación, para conseguir esto se utilizan las siguientes reglas:

- ✓ Si un término está sumando en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro restando o viceversa si está restando pasa a sumar.
- ✓ Si un término está multiplicando en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro dividiendo o viceversa si está dividiendo pasa a multiplicar.
- ✓ Si un término está potenciando en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro a radicar o viceversa si está radicando pasa a potenciar.

Resolvamos los ejemplos anteriores como ejercicios de aplicación.

1. $5x + 7 = 0$

Solución:

El número 7 que está sumando en el primer miembro vamos a pasar al segundo miembro con signo negativo.

$$5x = -7$$

El número 5 que está multiplicando a la variable x pasamos al segundo miembro dividiendo.

$$x = \frac{-7}{5}$$

El número $\frac{-7}{5}$ es la solución de la ecuación lineal dada, se sabe que el número encontrado es una solución porque al reemplazarlo en la ecuación original la igual se cumple o es verdadera.

$$5x + 7 = 0 ; 5\left(\frac{-7}{5}\right) + 7 = 0 ; -7 + 7 = 0 ; 0 = 0$$

2. Resolver la siguiente ecuación: $-\frac{1}{3}x + 5 = 0$

Solución:

Se procede de igual manera que en el ejercicio anterior:

$$-\frac{1}{3}x + 5 = 0 ; -\frac{1}{3}x = -5$$

Se multiplica por -1 a la ecuación para cambiar los signos:

$$(-1)\left(-\frac{1}{3}x\right) = (-1)(-5)$$

Destruyendo paréntesis y aplicando la ley de los signos se tiene:

$$\frac{1}{3}x = 5$$

El número de $\frac{1}{3}$ que multiplica a la variable x pasa al otro miembro a dividir:

$$\frac{1}{3}x = 5 ; x = \frac{5}{\frac{1}{3}}$$

Multiplicando extremos con extremos y medios con medios se tiene que:

$$x = \frac{5.3}{1.1} ; x = 15$$

3. Resolver la siguiente ecuación: $\frac{7}{3x-2} = 1$

Solución:

La expresión $3x - 2$ que está dividiendo pasa al otro miembro a multiplicar:

$$7 = 3x - 2$$

Aplicando las reglas anteriores y despejando la variable x sería:

$$x = \frac{9}{3} ; \quad x = 3$$

4. Resolver la siguiente ecuación:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2x - 3$$

Solución:

Factorando la cantidad subradical sería:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2x - 3$$

$$\sqrt{(x + 1)^2} = 2x - 3$$

Simplificando la raíz con la potencia 2:

$$\sqrt{(x + 1)^2} = 2x - 3 ; \quad x + 1 = 2x - 3$$

Entonces:

$$x = 4$$

5. Resolver la siguiente ecuación:

$$5xy - 3x = 2 + 7y$$

Solución:

Resolveremos esta ecuación tomando como letra directriz o incógnita a despejar la variable x (se puede también tomar como variable directriz a la y)

$$5xy - 3x = 2 + 7y$$

Factorando el primer miembro:

$$x(5y - 3) = 2 + 7y$$

Despejando la variable x :

$$x = \frac{2 + 7y}{(5y - 3)}$$

2.17.2 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Se llama un sistema de ecuaciones lineales al conjunto de dos o más ecuaciones de primer grado. Ejemplos:

$$\begin{cases} \textcircled{1} & 5x - 4y = 7 \\ \textcircled{2} & 3x + y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} & \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{9}{7} \\ \textcircled{2} & 11x - y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} & 9x - 6y + z = 12 \\ \textcircled{2} & 7x + y + 3z = 4 \\ \textcircled{3} & x + 3y - 6z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} & 2m - 5n + 2t = 8 \\ \textcircled{2} & 3m + n - t = 10 \\ \textcircled{3} & 3n + 8t = 6 \end{cases}$$

Para que un sistema de ecuaciones lineales tenga **solución única**, el sistema debe cumplir con la condición de que el número de ecuaciones debe ser igual al número de incógnitas, observando los ejemplos anteriores vemos que el primero y el segundo sistema de ecuaciones tiene dos ecuaciones enumeradas con el número 1 y 2 y dos incógnitas x e y por lo tanto cumple la condición dada.

Si el número de incógnitas es mayor al número de ecuaciones, se trata de un sistema de ecuaciones de variable libre la misma que tomará un valor numérico elemento de los números reales, se reemplaza este valor en la ecuación y se procede a resolver el sistema restante.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas existen algunos métodos de solución, en este acápite estudiaremos los siguientes:

- ✓ Método de igualación
- ✓ Método de sustitución
- ✓ Método de suma y resta
- ✓ Método gráfico
- ✓ Método de determinantes o regla de Cramer

Cuando el sistema tiene tres o más ecuaciones lineales, este se resuelve combinando los métodos anteriores o utilizando la regla de Cramer.

Resolvamos los ejemplos anteriores como ejercicios de aplicación.

1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el **método de igualación**:

$$\text{Ecuación } 1 \quad 5x - 4y = 7$$

$$\text{Ecuación } 2 \quad 3x + y = 9$$

En ambas ecuaciones despejamos la misma variable que puede ser x o y , en este caso despejaremos la x .

$$1 \quad x = \frac{7+4y}{5}$$

$$2 \quad x = \frac{9-y}{3}$$

Igualemos las x despejadas en ambas ecuaciones:

$$\frac{7 + 4y}{5} = \frac{9 - y}{3}$$

Como se observa tenemos una ecuación lineal con una sola incógnita (y), despejemos la y .

$$3(7 + 4y) = 5(9 - y)$$

$$21 + 12y = 45 - 5y$$

$$12y + 5y = 45 - 21$$

$$17y = 24$$

$$y = \frac{24}{17}$$

Este valor reemplazamos en cualquiera de los dos despejes de x .

$$x = \frac{7 + 4y}{5}$$

$$x = \frac{7 + 4\left(\frac{24}{17}\right)}{5}$$

$$x = \frac{7 + \frac{96}{17}}{5}$$

$$x = \frac{\frac{215}{17}}{5}$$

$$x = \frac{215}{85}$$

$$x = \frac{43}{17}$$

Entonces la solución del sistema de ecuaciones es:

$$x = \frac{43}{17} \quad ; \quad y = \frac{24}{17}$$

Para verificar que las respuestas obtenidas son correctas se reemplaza estos valores en cualquiera de las dos ecuaciones lineales del sistema así:

$$5x - 4y = 7 \quad ; \quad 5\left(\frac{43}{17}\right) - 4\left(\frac{24}{17}\right) = 7 \quad ; \\ \frac{215}{17} - \frac{96}{17} = 7 \quad ; \quad \frac{119}{17} = 7 \quad ; \quad 7 = 7$$

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el **método de sustitución**:

$$\text{Ecuación 1: } \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{9}{7}$$

$$\text{Ecuación 2: } 11x - y = 15$$

Se despeja en la ecuación 1 o en la ecuación 2 una variable (siempre se debe despejar la que presente menos dificultad para este proceso)

$$11x = 15 + y \quad ; \quad 11x - 15 = y$$

Este valor despejado se reemplaza en la primera ecuación:

$$\text{Ecuación 1: } \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}(11x - 15) = \frac{9}{7}$$

Con este reemplazo se logra tener una ecuación lineal con una solo incógnita la cual se procede a despejarla

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}x + \frac{11x}{2} - \frac{15}{2} &= \frac{9}{7} \\ \frac{25}{4}x &= \frac{9}{7} + \frac{15}{2} \\ x &= \frac{\frac{123}{14}}{\frac{25}{4}} \quad ; \quad x = \frac{492}{350} \quad ; \quad x = \frac{286}{175}\end{aligned}$$

Este valor encontrado se reemplaza en la ecuación despejada la y.

$$\begin{aligned}y &= 11x - 15 \\ y &= 11\left(\frac{286}{175}\right) - 15 \\ y &= \frac{3146}{175} - 15 \\ y &= \frac{521}{175}\end{aligned}$$

Para verificar que las respuestas obtenidas son correctas se reemplaza estos valores en cualquiera de las dos ecuaciones lineales del sistema así:

$$\begin{aligned}11x - y &= 15 \quad ; \quad 11\left(\frac{286}{175}\right) - \frac{521}{175} = 15 \\ \frac{3146}{175} - \frac{521}{175} &= 15 \\ 15 &= 15\end{aligned}$$

3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el **método de suma y resta**:

Ecuación 1 $5x - 4y = 7$

Ecuación 2 $3x + y = 9$

Solución:

Mediante la multiplicación o división por un número real se iguala los coeficientes de una de las dos variables luego se suma o se resta miembro a miembro como términos semejantes, en este caso multiplicamos a la primera ecuación por 3 y a la segunda ecuación por -5, a los resultados obtenidos los sumamos:

Ecuación 1(3) ; $3(5x - 4y) = 3(7)$

Ecuación 2(-5) ; $-5(3x + y) = -5(9)$

Destruyendo paréntesis tenemos:

$$\begin{array}{r} \cancel{15}x - 12y = 21 \\ -\cancel{15}x - 5y = -45 \\ \hline 0 - 17y = -24 \\ y = \frac{-24}{-17} \end{array}$$

Aplicando la ley de los signos:

$$y = \frac{24}{17}$$

Este valor reemplazamos en la ecuación 1 o ecuación 2 para obtener el resultado de la variable x:

Ecuación 1 $5x - 4y = 7$

Reemplazando el valor de $y = \frac{24}{17}$ y despejando la variable y:

$$5x - 4\left(\frac{24}{17}\right) = 7$$

$$5x - \frac{96}{17} = 7$$

$$5x = 7 + \frac{96}{17}$$

$$5x = \frac{215}{17}$$

$$x = \frac{\frac{215}{17}}{5}$$

$$x = \frac{215}{85}$$

$$x = \frac{43}{17}$$

Como se puede observar comparando los resultados obtenidos con este método son los mismos que obtuvimos al resolver este sistema por el método de igualación.

4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el **método gráfico**.

Ecuación 1 $x + 3y = 6$

Ecuación 2 $2x + y = 4$

Solución:

El método gráfico consiste en graficar sobre el plano cartesiano cada una de las ecuaciones dadas, para lo cual se realizan tablas de valores dando valores a la x y calculando el valor de la y .

Como se tratan de ecuaciones lineales, suficiente es con dar dos valores porque aplicando el axioma de la geometría plana que dice: “Por dos puntos dados pasa una y solamente una línea recta”.

La solución del sistema de ecuaciones se obtiene describiendo el valor que corresponde al punto de intersección entre las dos rectas dibujadas.

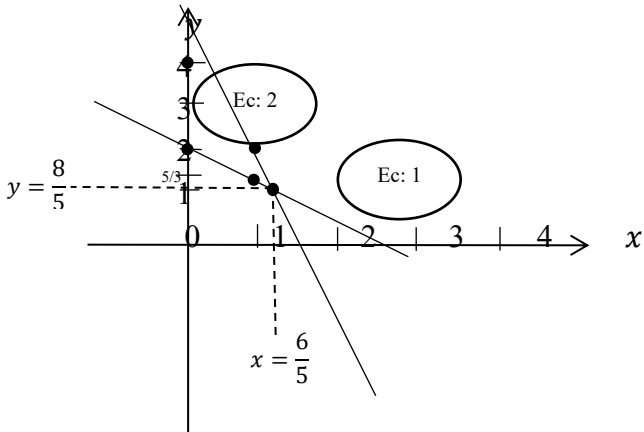
Ecuación 1 $x + 3y = 6$

x	y		
0	2	$\Rightarrow$	$0 + 3y = 6 ; y = \frac{6}{3} ; y = 2$
1	$\frac{5}{3}$	$\Rightarrow$	$1 + 3y = 6 ; y = \frac{6-1}{3} ; y = \frac{5}{3}$

Ecuación 2 $2x + y = 4$

x	y		
0	4	$\Rightarrow$	$2 \cdot 0 + y = 4 ; y = 4$
1	2	$\Rightarrow$	$2 \cdot 1 + y = 4 ; y = 2$

Graficando:



Solución del sistema

$x = \frac{6}{5}$; $y = \frac{8}{5}$; este resultado expresado como un par ordenado sería:

$$Sol = \left(\frac{6}{5} ; \frac{8}{5} \right)$$

5. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el **método determinante o Regla de Cramer**.

Ecuación 1 $9x - 6y + z = 12$

Ecuación 2 $7x + y + 3z = 4$

Ecuación 3 $x + 3y - 6z = 9$

Solución:

Este método trabaja con los coeficientes de las ecuaciones, con los mismo que se forma un determinante de la siguiente manera:

	x	y	z	$T.I$
Ec 1	a	b	c	n_1
Ec 2	d	e	f	n_2
Ec 3	g	h	i	n_3
	—	—	—	—
	—	—	—	—
	—	—	—	—
E_{cn}	c_x	c_y	c_z	n_n

Donde:

Ec1, Ec2, Ec3, E_cn , son las ecuaciones del sistema desde la primera hasta la última ecuación.

a, b, c, e, f..... C_x, C_y, C_z , son los coeficientes de las ecuaciones del sistema.

T.I son los valores de los términos independientes de las ecuaciones del sistema y va desde el término independiente de la primera ecuación hasta el término independiente de la última ecuación ($n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$), en este caso el determinante quedaría expresado así:

	x	y	z	$T.I$
Ec 1	9	- 6	1	12
Ec 2	7	1	3	4
Ec 3	1	3	- 6	9

Para calcular la variable x se copia este determinante, pero en lugar de los coeficientes de x se colocan los valores de los términos independientes, este procedimiento se utiliza para calcular también las restantes variables, en el denominador de todas las variables se coloca la matriz formada por los coeficientes del sistema de ecuaciones, así:

$$x = \begin{array}{c|ccc|} & \text{T. I} & y & z & \\ & 12 & -6 & 1 & \\ & 4 & 1 & 3 & \\ & 9 & 3 & -6 & \\ \hline & 9 & -6 & 1 & \\ & 7 & 1 & 3 & \\ & 1 & 3 & -6 & \end{array}$$

$$y = \begin{array}{c|ccc|} & x & \text{T.I} & z & \\ & 9 & 12 & 1 & \\ & 7 & 4 & 3 & \\ & 1 & 9 & -6 & \\ \hline & 9 & -6 & 1 & \\ & 7 & 1 & 3 & \\ & 1 & 3 & -6 & \end{array}$$

$$z = \begin{array}{c|ccc|} & x & y & \text{T.I} & \\ & 9 & -6 & 12 & \\ & 7 & 1 & 4 & \\ & 1 & 3 & 9 & \\ \hline & 9 & -6 & 1 & \\ & 7 & 1 & 3 & \\ & 1 & 3 & -6 & \end{array}$$

Resolviendo estos determinantes sabiendo que la multiplicación de los números que se encuentran en la diagonal principal lleva signo positivo y multiplicación de los números de la diagonal secundaria llevan signo negativo se obtiene lo siguiente:

$$x = \frac{-483}{-385} \quad ; \quad x = \frac{483}{385}$$

$$y = \frac{140}{-385} \quad ; \quad y = -\frac{28}{77}$$

$$z = \frac{567}{-385} \quad ; \quad z = -\frac{567}{385}$$

Comprobando las respuestas obtenidas en la ecuación 1 del sistema tenemos:

$$9x - 6y + z = 12$$

$$9\left(\frac{483}{385}\right) - 6\left(-\frac{28}{77}\right) + \left(-\frac{567}{385}\right) = 12$$

$$\frac{4347}{385} + \frac{168}{77} - \frac{567}{385} = 12$$

$$12 = 12$$

6. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales combinando los métodos anteriores:

$$\text{Ecuación 1} \quad 2m - 5n + 2t = 8$$

$$\text{Ecuación 2} \quad 3m + n - t = 10$$

$$\text{Ecuación 3} \quad 3n + 8t = 6$$

Solución:

Vamos a trabajar con la ecuación 1 y 2 para eliminar la variable m, para ello a la ecuación 1 multiplicamos por 3 y a la ecuación 2 multiplicamos por -2:

$$\begin{array}{r} \cancel{6m} - 15n + 6t = 24 \\ -\cancel{6m} - 2n + 2t = -20 \\ \hline 0 - 17n + 8t = 4 \text{ Ecuación 4} \end{array}$$

Operamos ahora entre las ecuaciones 3 y 4 para eliminar a la variable n, para ello a la ecuación 3 multiplicamos por 17 y a la ecuación 4 multiplicamos por 3:

$$\begin{array}{r} \cancel{51n} + 136t = 102 \\ -\cancel{51n} + 24t = 12 \\ \hline 0 + 160t = 114 \end{array}$$

$$t = \frac{114}{160} ; \quad t = \frac{57}{80}$$

Reemplazamos este valor en la ecuación 4 para calcular el valor de la variable n:

$$-17n + 8t = 4 \quad ; \quad -17n + 8\left(\frac{57}{80}\right) = 4$$

$$-17n + \frac{57}{10} = 4 \quad ; \quad -17n = 4 - \frac{57}{10}$$

$$-17n = -\frac{17}{10} \quad ; \quad n = \frac{-\frac{17}{10}}{-17}$$

$$n = \frac{17}{170}$$

Estos valores encontrados de las variables t y n reemplazamos en la ecuación 2:

$$3m + n - t = 10 \quad ; \quad 3m + \frac{17}{170} - \frac{57}{80} = 10$$

$$3m = 10 - \frac{17}{170} + \frac{57}{80} \quad ; \quad 3m = \frac{849}{80}$$

$$m = \frac{\frac{849}{80}}{3} \quad ; \quad m = \frac{849}{240} \quad ; \quad m = \frac{283}{80}$$

Comprobando las respuestas obtenidas en la ecuación 1 del sistema tenemos:

$$2m - 5n + 2t = 8$$

$$2\left(\frac{283}{80}\right) - 5\left(\frac{17}{170}\right) + 2\left(\frac{57}{80}\right) = 8$$

$$\frac{566}{80} - \frac{85}{170} + \frac{114}{80} = 8$$

$$8 = 8$$

2.18. ECUACIONES CUADRÁTICAS

Empezaremos definiendo lo que es la función cuadrática que le simbolizaremos con $f(x)$.

$f(x) = ax^2 + bx + c$; donde:

$f(x)$: función cuadrática.

a y b : coeficientes de la función cuadrática.

c : Término independiente.

x : Variable en la cual está escrita la función cuadrática (se puede utilizar cualquier letra del abecedario como variable de la función).

Miremos ejemplos de funciones cuadráticas:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$f(y) = y^2 + 7$$

La gráfica de una función cuadrática siempre será una parábola:

Graficar la función:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

Realizaremos una tabla de valores:

x	y	
1	4	calculemos los valores de la tabla con
2	9	los datos asignados a la variable x .
0	1	Reemplacemos el primer valor de
-1	-1	$x = 1$ en la función:
-2	1	$f(x) = x^2 + 2x + 1$
-3	4	

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 ; f(1) = (1)^2 + 2(1) + 1 = 4$$

De igual manera procedemos para calcular los valores de y con los otros valores asignados a x .

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 ; f(2) = (2)^2 + 2(2) + 1 = 9$$

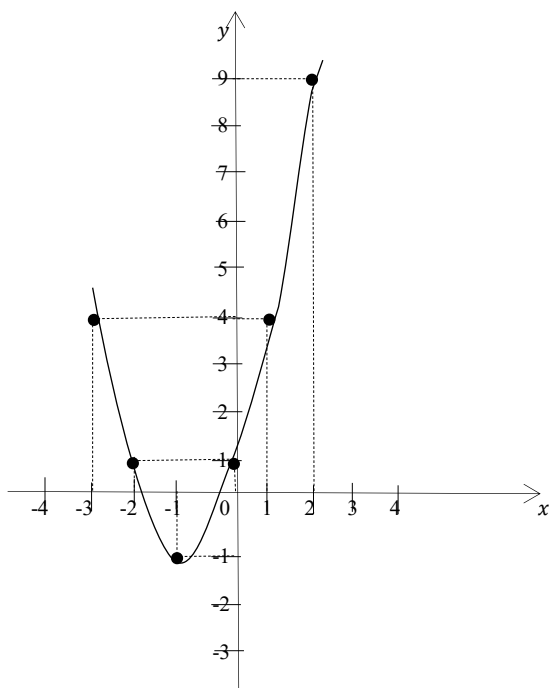
$$f(x) = x^2 + 2x + 1 ; f(0) = (0)^2 + 2(0) + 1 = 1$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 ; f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 1 = -1$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 ; f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) + 1 = 1$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 ; f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) + 1 = 4$$

Graficando:



Se llama ecuación cuadrática aquella que el mayor exponente de la variable es el número 2. Ejemplos:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$5x^2 + 3x = -1$$

$$\frac{3}{4}x^2 + 8x + 1 = 7$$

Para resolver este tipo de ecuaciones se tiene al menos dos formas que estudiaremos en este apartado.

- Utilizando el factoreo
- Utilizando la fórmula general de segundo grado

- 1) **Utilizando el factoreo**, este proceso consiste en factorar el polinomio utilizando uno de los métodos explicados en la factorización, luego aplicar la definición dada en los números reales que funciona también para los polinomios:

$$a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a \neq 0 \text{ y } b = 0 \\ a = 0 \text{ y } b \neq 0 \\ a = 0 \text{ y } b = 0 \end{array} \right.$$

Ejemplos:

1. Resolver la siguiente ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$

Solución:

Factorizamos a la expresión $x^2 + 2x + 1 = 0$:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad ;$$

$$(x + 1)(x + 1) = 0 \quad ;$$

Aplicando la propiedad anterior: $a \cdot b = 0$, se tiene:

$$x + 1 = 0 \quad ; \quad x = -1$$

$$x + 1 = 0 \quad ; \quad x = -1$$

Observación: el exponente de la variable nos indica el número de soluciones que debe tener la ecuación, si es de primer grado una solución si es de segundo grado dos soluciones etc.

2. Resolver la siguiente expresión: $x^2 - 7x + 10 = 0$

Solución:

Procedemos de igual manera que en el ejemplo anterior:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x - 5)(x - 2) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad ; \quad x = 5$$

$$x - 2 = 0 \quad ; \quad x = 2$$

Entonces esta ecuación tiene dos soluciones: $x = 2$; $x = 5$, esto significa que si reemplazamos en la ecuación original con estos dos valores se cumple la igualdad así:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad ; \quad \text{reemplazando con el valor } x = 2$$

$$(2)^2 - 7(2) + 10 = 0 \quad ; \quad 4 - 14 + 10 = 0 \quad ; \quad 0 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad ; \quad \text{reemplazando con el valor } x = 5$$

$$(5)^2 - 7(5) + 10 = 0 \quad ; \quad 25 - 35 + 10 = 0; \quad 0 = 0$$

3. Resolver la siguiente expresión:

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

Solución:

$$\text{Factorizando: } 2x^2 - x - 6 = 0 \quad ;$$

$$2x^2 - x - 6 = 0 \quad ; \quad \frac{(2x-4)(2x+3)}{2} = 0$$

$$\frac{(2x-4)(2x+3)}{2} = 0 \quad ; \quad \frac{\cancel{2}(x-2)(2x+3)}{\cancel{2}} = 0$$

$$(x-2)(2x+3) = 0$$

Igualando a 0 cada factor tenemos:

$$x - 2 = 0 \quad ; \quad x = 2$$

$$2x + 3 = 0 \quad ; \quad x = -\frac{3}{2}$$

2) Utilizando la fórmula general de la ecuación de segundo grado.

En forma general la ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática se escribe así:

$$ax^2 + bx + c = 0 ; \text{ con } a \neq 0$$

La ecuación de segundo grado trabaja únicamente con los coeficientes de la expresión, determinemos la fórmula:

En $ax^2 + bx + c = 0$; dividimos todo para el coeficiente de x^2 y pasamos el término independiente al segundo miembro:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = 0 ; \quad \cancel{a}x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{-c}{a}$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Sumando la misma expresión

$\left(\frac{b^2}{4a^2}, \text{ para formar un trinomio cuadrado perfecto}\right)$

a ambos miembros de la ecuación anterior tenemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Factorando tenemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Eliminando la potencia del primer miembro de la ecuación:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ; \text{ despejando la variable } x,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta última ecuación es la conocida como la fórmula general de la ecuación de segundo grado. Apliquemos esta ecuación en algunos ejercicios:

1. Aplicando la fórmula general de la ecuación de segundo grado resolver la siguiente ecuación:

$$5x^2 + 3x = -1$$

Solución:

Observación: Para aplicar la ecuación de segundo grado el polinomio debe estar igualado a cero (0).

Igualando a cero el polinomio:

$$5x^2 + 3x + 1 = 0$$

Determinemos los coeficientes del polinomio y el término independiente que por igualación con el polinomio general de segundo grado tenemos:

$$ax^2 + bx + c = 0 ; \text{ con } a \neq 0$$

$$a = 5 ; b = 3 ; c = 1$$

Aplicando la fórmula general de la ecuación de segundo grado.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(5)(1)}}{2(5)}$$

Como se indicó anteriormente la ecuación de segundo grado tiene dos respuestas las mismas que se detalla a continuación:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{3^2 - 4(5)(1)}}{2(5)}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{3^2 - 4(5)(1)}}{2(5)}$$

Operando las expresiones anteriores:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{-11}}{10}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{-11}}{10}$$

2. Resolver la siguiente ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$2x^2 + 5x - 12 = 0$$

Solución:

$$a = 2 \ ; \ b = 5; \ c = -12$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-12)}}{2(2)}$$

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-12)}}{2(2)} \ ; \ x_1 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-12)}}{2(2)} \ ; \ x_2 = -4$$

3. Resolver la siguiente ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$6x^2 + 17x + 12 = 0$$

Solución:

$$a = 6 \ ; \ b = 17 \ ; \ c = 12$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ ; \ x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4(6)(12)}}{2(6)}$$

$$x_1 = \frac{-17 + \sqrt{17^2 - 4(6)(12)}}{2(6)} \ ; \ x_1 = -\frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{-17 - \sqrt{17^2 - 4(6)(12)}}{2(6)} \ ; \ x_2 = -\frac{3}{2}$$

2.19. EJERCICIOS PROPUESTOS UNIDAD II

2.19.1. TÉRMINO ALGEBRAICO

En el siguiente ejercicio determinar el grado del polinomio.

1. (a) $7x^2 - 2x + 5$; (b) $4u + 3v$;
(c) $4xy^3z$; (d) $2rs - s^3 + 6r^2s^2$
2. (a) $8x^4 + 6x^2 - 1$; (b) $-8rst^2$;
(c) $2u^3v^2w + 5uv^3$; (d) $xyz - 3x^2 + 2x^2$

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

3. (a) $4x^2 - 5x + 6x^2 - 2x$; (b) $-5(6y^3 - 4y^2 + y - 3)$
4. (a) $7x^2 - y^3 - 3y^2 - 8y^3$; (b) $2(3u - 4v) - (5u - 3v)$
5. (a) $3(-t^2 + 3st - 2s^2) - 2(7t^2 - st - s^2)$; (b) $-(x - 9) - 4[3x - 2(6 + x) - 5]$
6. (a) $4(x^3 + 3x^2y - 2xy^2 - y^3) - 2x(3x^2 + xy - 5y^2)$; (b) $3(2w - 3z) - [w - z - (w + z)]$

2.19.2. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En los siguientes ejercicios, (a) sume los dos polinomios y (b) reste el segundo polinomio del primero.

7. $4x^3 - 7x^2 + 2x - 4$; $3x^3 + 8x^2 + 3x - 7$
8. $5x^3 - 3x + 10$; $x^3 - 6x^2 + 4x - 2$
9. $6y^4 - 2y^2 + 3y - 1$; $8y^4 - 5y^3 - 2y^2 + 6$

10. $2z^5 + 7z^4 - z^2 + 4z + 1$; $4z^5 - 6z^3 + z - 8$
Obtener el producto en los siguientes ejercicios. En los ejercicios 13, 14, 25 y 26, n es un entero positivo.

11. (a) $-3x^2(4x^2 - 2x + 7)$; (b) $\frac{1}{2}a^3b^2(2a^2 + 5ab - b^2)$

12. (a) $5y^3(3 - 6y + 2y^2)$; (b) $-6ab^4\left(4a^2 - \frac{2}{3}ab - \frac{1}{2}b^2\right)$

13. (a) $2xyz^2(3xz - 6yz - xy - 1)$;
(b) $3x^{2n}(x^{n+1} - 4x^n + 5)$

14. (a) $uvw(uv - 2uw + vw - 8)$; (b) $x^{2n-1}(2x^{2n} + 3x - 1)$

15. (a) $(2x + 3)(x - 7)$; (b) $(5x - 6t)(2s + 4t)$

16. (a) $(y + 8)(4y - 3)$; (b) $(2x^2 - 5y^2)(-3x^2 + y^2)$

17. (a) $-4(9a - 5b)(a + 3b)$; (b) $2y(4y + 1)^2$

18. (a) $-x(x - 7)^2$; (b) $(a - 6)(3a^2 - 4a + 2)$

19. $(3x + 5y)(3x^2 - xy + 4y^2)$

20. $(2u - 5v)(4u^2 - uv - 3v^2)$

21. $(2x^2 + 4x - 3)(x^2 - 6x + 5)$

22. $(3t^2 + 2t + 1)(-2t^2 - 5t + 6)$

23. $(b - 3b^2 + 7)(5b^2 + 2 - 3b)$

24. $(2x - 5 + x^2)(8x^2 - 6 - x)$

25. $(3x^{2n} + y^n)(4x^{2n} - 5y^n)$

$$26. (3a^{3n} + b^{2n})(a^{2n} - b^n)$$

2.19.3.PRODUCTOS NOTABLES

Aplicar los productos notables en los siguientes ejercicios.

$$27. (a) (x + 4)(x + 5); (b) (2x + 3y)^2$$

$$28. (a) (y - 2)(y + 1); (b) (5t + 3)^2$$

$$29. (a) (w + 6)(w - 6); (b) (3r - 2s)(4r + s)$$

$$30. (a) (x + 4)(x - 4); (b) (6x - y)(3x + 2y)$$

$$31. (a) (t^2 - 5)(t^2 + 9); (b) (4x^2 - 3y^2)^2$$

$$32. (a) (x^3 - 7y)(3x^3 - 8y); (b) (6a + 5b)^2$$

$$33. (a) (11u + 8v)(11u - 8v); (b) (7a^2 - 2b^2)(5a^2 + 3b^2)$$

$$34. (a) (3r - 10s)(3r + 10s); (b) (2x + 9y)(7x - 4y)$$

En los ejercicios 35 a 54, obtener el cociente. Ninguno de los divisores es cero. En los ejercicios 37 y 38, n es un entero positivo.

$$35. (a) \frac{8x^2 - 28x^4}{4x^2}; (b) \frac{35u^2v^3 - 20u^3v^2}{-5u^2v}$$

$$36. (a) \frac{a^2b - ab^3}{ab}; (b) \frac{-48y^3 + 30y^2 - 18y}{6y}$$

$$37. (a) \frac{-24a^3b^3c^4 + 32a^2b^4c^2 - 16a^5b^3c^3}{8a^2b^2c^2}; (b) \frac{16t^{4n} - 64t^{6n}}{2t^{2n}}$$

$$38. (a) \frac{28x^3y^6z^4 - 49x^2y^5z^3 - 21xy^3z^3}{-7xy^3z^2}; (b) \frac{4x^{4n} - 8x^{8n}}{2x^{2n}}$$

$$39. \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$$

$$40. \frac{3y^2-13y+4}{y-4}$$

$$41. \frac{6a^2+5a-6}{3a-2}$$

$$42. \frac{12x^2+5x-2}{3x+2}$$

$$43. \frac{12+2x-3x^2}{x+1}$$

$$44. \frac{t^3-7t-6}{t+2}$$

$$45. \frac{5b^3+7b^2+12}{b+2}$$

$$46. \frac{a^3-3a^2-a+3}{a-2}$$

$$47. \frac{y^3-6y+5}{y^2+3y-2}$$

$$48. \frac{2x^3+4x^2-5}{x^2+3}$$

$$49. \frac{x^3-27}{x-3}$$

$$50. \frac{6t^2-ts-t^2}{3t+s}$$

$$51. \frac{4x^2-2xy-3y^2}{2x+3y}$$

$$52. \frac{a^4+16}{a+2}$$

$$53. \frac{a^6-b^6}{a-b}$$

$$54. \frac{x^5+y^5}{x+y}$$

Resolver los siguientes ejercicios.

$$55. \text{ Se conoce que } 2x^3 - x^2 + \left(\frac{1}{a}\right)x - 7 = 5x^3 -$$

$x^2 - \left(\frac{1}{c}\right)x + 7$. Determine los valores de a y c para que estos polinomios sean iguales.

56. Introduzca los tres últimos términos en un paréntesis precedido de signo negativo

a) $2x^3 - x^2 - x + 5$

b) $a^2 - b^2 - c^2 - d^2$

c) $x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 7$

57. Los términos agrupados con signo positivo, cámbielos a términos agrupados con signo negativo.

a) $3x + (6x - 7) - (4x - 7) + (-8x + 5)$

b) $x^5 + [7x^4 + (3x^3 - 7) - (-7x^2 - 5)] - 5x$

c) $4x^3 + [3x^4 + (2x^2 + 5x - 6)] - 5x^2$

Simplificar:

58. $-4a + \{-5a + [4b - 3a - (5a + b) + (5a - 3b)] - 4a\} - 4a$

59. $-\{3x + y - 2[8x - 3y - (3x^2 - y^2 + 5x)] - 8x\} + 6x$

60. $-\{8xy + 8yz - [4yz + 8xy - (3xy + yz) + 5x - (6y + 6x)] - 8yz\}$

61. $-3a + [8a - (4a - 2a) + 3b] - (b - 2b + a) - 3b$

62. Sume, de dos maneras; $8x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 5$; $19x^4 - 7x^3 + 2x^5 - 20x + 19$

63. Halle el resultado de $A+B+2C$

$A = 19x^5 - (3x^3 + 8x^2 - 7x) + 6 - 7x^4$

$B = 8x^6 + ax^3 - 19x^2 - (7x - 6)$

$$C = -(7x^6 + 3x^3 - 2x^4) - (3x^2 + x) - 5$$

Sumar los siguientes ejercicios:

$$64. ax^5 - bx^2 + ax^3 - cx^2 + c + b \quad y \quad bx^5 - cx^3 + ax^2 + ax^2 - bx - b$$

$$65. \left(\frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{2}{4}\right)x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)x - \left(\frac{1}{6}\right); \quad 2x^3 + \left(\frac{1}{3}\right)x^2 - \left(\frac{1}{6}\right)x$$

$$66. x^2 - \left(\frac{1}{6}\right)x + \left(\frac{1}{9}\right); \quad \left(\frac{1}{2}\right)x^2 - 3x + \left(\frac{1}{6}\right)$$

67. Determine un $P(x)$ que sumado con $N(x)$ de $M(x)$

$$N(x) = \left(\frac{1}{3}\right)x^3 - \left(\frac{2}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)x - \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$M(x) = 3x^3 - 4x^2 + \left(\frac{1}{8}\right)x - \left(\frac{1}{6}\right)$$

68. Determinar a, b, c, d, e para que:

$$\left[\left(\frac{1}{a}\right)x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)x + b - dx^2\right] + \left[\left(\frac{3}{4}\right)x^3 + cx + \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)x^2\right] = \left(\frac{3}{5}\right)x^3 - \left(\frac{3}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}\right)x - 2$$

69. Encontrar $P(x)$, tal que:

$$P(x) + \left(\frac{2}{3}\right)x^3 - \left(\frac{1}{7}\right)x^4 + \left(\frac{2}{5}\right)x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)x - 6 + x^2$$

70. Halle $P_1(y) + P_2(y)$:

$$P_1(y) = y^5 + 5y^4x + 10y^3x^2 + 10y^2x^3 - 5yx^4 + x^5$$

$$P_2(y) = y^5 + 4y^4x - 6y^3x^2 + 6y^2x^3 - x^5$$

$$71. \text{ Reste } ax^4 + bx^3 - cx^2 \text{ de } ax^4 - 3bx^3 + 4cx^2 + dx + 2$$

$$72. \text{ Reste } a + b + c + d - e \text{ de } 5a - 3b + 6c -$$

$$d + e - b^2$$

73. De $18x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 9x + 7$ restar $8x^4 - 7x^3 - 16x^2 + 9x - 13$

74. Reste $P(x)$ de $R(x)$

$$R(x) = 3s_1(x) - 2s_2(x) \quad P(x) = 2s_2(x) + 3s_1(x)$$

$$2s_2(x) = 14x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 4$$

Multiplicar los polinomios dados

75. $(x^3 - x^2 + x)(-2x^2 + 5)$

76. $(y^4 - 3y^3 + 5)(y^2 - y)$

77. $(x^3 - 5x^2 + x)(-2x^3 - 6x^2 - x)$

78. $(y - x + z)(3x - 3y - 2z)$

79. $(ax^2 - 10)(ax^2 + 5)$

80. $(3a - 2)(9x^2 + 6a + 4)$

81. $(ax - b)^3$

82. $(x + b)^4$

83. $(ax + 2)^2(x - 1)$

84. $[(2x - 3) + (3x^2 - 3x + 6)]^2$

85. $[(x^2 - 2x + 1) - (3x^2 + x - 3)]^2 - (x^2 - 3)^2$

86. $[(4x^4 - 3x^3) - (2x^2 - x + 1)^2](x - 2)$

87. $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

88. $[x^4 - (x - 2)^4 + 2(x - 1)^3]$

89. $x^3 - (x^2 - x + 1)2 + (x^2 + 2x + 2)^2$

90. $(y^4 - y^3 + 5y^2)(-y^2 + y)$

91. $(x^3 - x^2 - x)(5 - 2x^2)$

92. Determine a, b, c, d, e, f, si se conoce

$$ax^6 - fx^5 + ex^4 + gx^3 - bx^2 + cx + d = 4$$

$$P_1(x) - (x - 2)P_2(x)$$

$$P_1(x) = x^6 - \left(\frac{1}{2}\right)x^5 - 3x^2 + x - 5$$

$$P_2(x) = x^4 - x^2 + 3$$

93. Determine a, b, c, si $4x^4 - bx^3 - cx^2 - 9x + 2 = (2x - a)^2(x^2 - x + 2)$

94. Determine a, b, c, para que

$$(y - a)(y + 3)(y + a)(y - 3) = cy^4 - by^2 + 36$$

Determine el cociente y el residuo de:

$$95. a^2 - 2ab + b^2 \div a^2b^2$$

$$96. x^5 - 5x^3 - 3x^2 - 12x - 7 \div x^2 - 3x + 5$$

$$97. b^4 - 3b^2 + 8b - 5 \div b^3 + b^2 - b$$

$$98. 4x^5 - 4x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 4 \div x^3 + x^2 + 2x - 2$$

$$99. 3x^2 - x + 4 \div x^2 - 3x - 5$$

$$100. 3x^3 - x + 1 \div 3x^2 - 2x$$

$$101. z^6 + z^5 - 6z^4 - 5z^3 + 4z^2 \div z^3 + z^2 - 4z - 5$$

$$102. y^4 - y^3 + 5y^2 + y - 1 \div y^3 + 3y + 1$$

$$103. (x - 1)^5 \div x^2 + 1$$

$$104. x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2 \div x^2 + x + 1$$

$$105. x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 5 \div x - 3$$

$$106. y^4 + y^3 - y^2 - 5 \div y - 2$$

107. $x^2 - 3x + 5 \div -x + 1$
108. $x^3 + 1 \div x + 1$
109. $x^3 - a^3 \div x - a$
110. $2x^2 - 4x + 5 \div 2x - 5$
111. $x^3 - x^2 + \left(\frac{2}{3}\right)x - \left(\frac{1}{24}\right) \div x - \left(\frac{1}{2}\right)$
112. $4y^5 - 6y^3 + 8y - 3 \div 2y + 1$
113. $6x^2 + x - 2 \div 2x - 1$
114. $4x^2 - 6x - 8 \div 2x + 1$
115. $a^2 - 2ab + b^2 \div a - b$
116. $x^2 - ax + 1 \div x - a$
117. $a^4 - b^4 \div a + b$
118. $a^2 - 2ab + b^2 \div a^2b^2$
119. $x^5 - 5x^3 - 3x^2 + 2x - 7 \div x^2 - 3x + 5$
120. $b^4 - 3b^2 + 8b - 5 \div b^3 + b^2 - b$
121. $4x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 4 \div x^3 + 9x^2 + 2x - 2$
122. $3x^2 - x + 4 \div x^2 - 3x - 5$
123. $3x^3 - x + 1 \div 3x^2 - 2x$
124. $z^6 + z^5 - 6z^4 - 5z^3 + 4z^2 \div z^3 + 3z^2 - 4z - 5$
125. $y^4 - y^3 + 5y^2 + y - 1 \div y^3 + 3y + 1$
126. $(x - 1)^5 \div x^2 + 1$
127. $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2 \div x^2 + x + 1$
128. $x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 5 \div x - 3$
129. $y^4 + y^3 - y^2 - 5 \div y - 2$
130. $x^2 - 3x + 5 \div -x + 1$
131. $x^3 + 1 \div x + 1$
132. $x^3 - a^3 \div x - a$

133. $2x^2 - 4x + 5 \div 2x - 5$
 134. $x^3 - x^2 + \left(\frac{2}{3}\right)x - \left(\frac{1}{24}\right) \div x - \left(\frac{1}{2}\right)$
 135. $4y^5 - 6y^3 + 8y - 3 \div 2y + 1$
 136. $6x^2 + x - 2 \div 2x - 1$
 137. $4x^2 - 6x - 8 \div 2x + 1$
 138. $a^2 - 2ab + b^2 \div a - b$
 139. $x^2 - ax + 1 \div x - a$
 140. $a^4 - b^4 \div a + b$

Simplificar los siguientes ejercicios:

141. (a) $\frac{12a^2}{3a^6}$; (b) $\frac{7x^2y^5}{21x^5y^3}$; (c) $\frac{-36rs^2t^7}{30rs^7t^6}$
 142. (a) $\frac{9x^5}{36x^2}$; (b) $\frac{25a^2b^2}{10a^4b^2}$; (c) $\frac{20x^3y^2z^4}{15x^6y^6z}$
 143. (a) $\frac{2x-4}{x^2-4}$; (b) $\frac{x^2-y^2}{x^2+xy}$
 144. (a) $\frac{y^2-4y+4}{y^2-4}$; (b) $\frac{5c+5d}{c^2+cd}$
 145. (a) $\frac{t^2-3t-28}{t^2-4t-21}$; (b) $\frac{6x^2-xy-y^2}{2x^2-9xy+4y^2}$
 146. (a) $\frac{a^2+8a+15}{a^2-a-12}$; (b) $\frac{6x^2+12x+7}{12x^2+13x-35}$
 147. (a) $\frac{x^2-16}{4-x}$; (b) $\frac{x^3-27}{8x^3-y^3}$
 148. (a) $\frac{5-a}{a^2-25}$; (b) $\frac{2x-y}{8x^3-y^3}$

Operar y simplificar los siguientes ejercicios.

$$149. \frac{\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

$$150. \frac{\frac{a-\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}}}{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}}$$

$$151. \frac{\frac{x^2}{y^2}-1}{\frac{x^2}{y^2}-\frac{2x}{y}+1}$$

$$152. \frac{t}{1+\frac{t-1}{t+1}}$$

$$153. \frac{\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}$$

$$154. \frac{\frac{a-b}{a+b}-\frac{b}{a-b}}{1+b\left(\frac{2}{a+b}-\frac{3}{b-a}\right)}$$

2.19.4.FACTORIZACIÓN

Factorizar los siguientes ejercicios, considerar donde aparece n, como un entero positivo.

$$155. 8x^2 + 4x$$

$$156. 9y^2 - 3y$$

$$157. a^5 - 3a^4 + a^3$$

$$158. x^4 + 2x^3 + 3x^2$$

$$159. 36xy - 6y^2$$

$$160. 12x^2y^3 - 4x^3y^2$$

$$161. a^4b^3 - a^3b^4 + a^2b^6$$

$$162. 6u^2v^3 + 3u^3v^4 - 9u^5v^6$$

$$163. -12xy^3z^2 - 28y^3z - 20x^2y^2z^2$$

$$164. r^2s^4t^3 + r^3s^3t^2 + r^3s^2t^4$$

$$165. y^{3n} - y^{2n+1} + y^{2n}$$

$$166. a^{2n+1} + a^{n+2} + a^{n+1}$$

- 167. $a^2 - 64$
- 168. $16 - y^2$
- 169. $x^2 - 49y^2$
- 170. $4u^2 - 9v^2$
- 171. $4s^2 - 25r^2$
- 172. $36x^2 - 81y^2$
- 173. $9x^2y^2 - 16w^6$
- 174. $49t^8 - 25x^{10}$
- 175. $x^{2n} - y^{6n}$
- 176. $b^{2n} - c^{8n}$
- 177. $x^2 + 7x + 10$
- 178. $x^2 - 9x + 18$
- 179. $a^2 - 10a + 24$
- 180. $y^2 + 13y + 42$
- 181. $t^2 - 4t - 32$
- 182. $x^2 + 5x - 24$
- 183. $21x^2 - 10xy + y^2$
- 184. $a^2 + 4ab - 21b^2$
- 185. $x^2 + 6x + 9$
- 186. $y^2 - 10y + 25$
- 187. $16x^2 - 8x + 1$
- 188. $9x^2 - 30xy + 25y^2$
- 189. $4a^2 - 12ab + 9b^2$
- 190. $25y^6 - 10y^3 + 1$

2.19.5.ECUACIONES LINEALES Y SISTEMA DE ECUACIONES

Resolver las siguientes ecuaciones utilizando los métodos estudiados.

$$191. 7x + 4 = 25$$

$$192. 7 = y + 10$$

$$193. 4w - 3 = 11 - 3w$$

$$194. x - 9 = 3x + 3$$

$$195. 2(t - 5) = 3 - (4 + t)$$

$$196. 1 - 3(2x - 4) = 4(6 - x) - 8$$

$$197. x = x + 1$$

$$198. x + 3 = 1 + x + 2$$

$$199. 3(4y + 9) = 7(2 - 5y) - 2y$$

$$200. -2[s - (5 - 4s)] + 4 = -3s$$

$$201. \frac{3x-2}{3} + \frac{x-3}{2} = \frac{5}{6}$$

$$202. \frac{3}{8} + \frac{1}{2x} = \frac{2}{x}$$

$$203. \frac{5}{2y} - \frac{1}{y} = \frac{3}{4}$$

$$204. \frac{1}{4-t} + \frac{3}{6+t} = 0$$

$$205. \frac{2}{3x-4} = \frac{5}{6x-7}$$

$$206. \frac{3}{x^2-9} - \frac{7}{x-3} = \frac{4}{x+3}$$

Despejar la variable x o y.

$$207. 3ax + 6ab = 7ax + 3ab$$

$$208. \frac{a+3x}{b} = \frac{c}{2}$$

$$209. a(y - a) - 2b(y - 3b) = ab$$

$$210. 5a(5a + x) = 2a(2a - x)$$

$$211. \frac{x+b}{3a-4b} = \frac{x-a}{2a-5b}$$

$$212. \frac{1}{c-y} + \frac{2}{c+y} = \frac{1}{y}$$

Resolver las siguientes ecuaciones:

$$213. \sqrt{x} - 5 = 3$$

$$214. \sqrt{x} + 4 = 7$$

$$215. \sqrt{x} + 5 = 3$$

$$216. \sqrt{x} - 4 = 7$$

$$217. \sqrt{2x - 3} = 2$$

$$218. \sqrt{2x + 5} = 3$$

$$219. \sqrt{y} + y = 6$$

$$220. \sqrt{t} + 6 = t$$

$$221. \sqrt{3x + 7} = x + 1$$

$$222. 2\sqrt{x + 4} - 1 = x$$

$$223. \sqrt{x + 5} - \sqrt{x} = 1$$

$$224. \sqrt{2t + 1} - 2\sqrt{t} - 1 = 0$$

$$225. \sqrt{3x - 4} + 8 = 0$$

$$226. \sqrt{5x + 1} + \sqrt{3x} + 1 = 0$$

$$227. \sqrt{5w + 1} - \sqrt{3w} - 1 = 0$$

$$228. \sqrt{2 + 4y} + \sqrt{3 - 4y} = 3$$

$$229. \sqrt{2x + 11} + 1 = \sqrt{5x + 1}$$

$$230. 7 - \sqrt{8 - x} = \sqrt{2x + 25}$$

$$231. \sqrt{t}\sqrt{t - 6} + 4 = 0$$

$$232. \sqrt{x}\sqrt{x - 5} - 4 = 0$$

$$233. \sqrt{4 - 3x} + \sqrt{3x - 9} = \sqrt{3x - 14}$$

$$234. \sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 4} = 3\sqrt{x - 1}$$

$$235. \sqrt{y - 2}\sqrt{y + 3} + 6 = 0$$

$$236. \sqrt{w + 2}\sqrt{w - 1} + 2 = 0$$

237. $\sqrt{\sqrt{5x-1}-x} = 1$
238. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-7}-4 = 0$
239. $\sqrt[3]{3x+1} = x+1$
240. $\sqrt[3]{x^2-1} = x-1$
241. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
242. $9x^4 - 8x^2 - 1 = 0$
243. $8\left(x + \frac{1}{2x}\right)^2 - 30\left(x + \frac{1}{2x}\right) + 27 = 0$
244. $\left(x - \frac{5}{x}\right)^2 - 2\left(x - \frac{5}{x}\right) =$
245. La suma de dos números es 9 y su diferencia es 6. ¿Cuáles son los números?
246. Obtenga dos números cuya suma sea 7, sabiendo que uno es el triplo (o triple) del otro.
247. El más pequeño de dos números es 9 veces menor que el mayor y su suma es 37. Halle los números.
248. Obtenga tres enteros pares consecutivos cuya suma sea 138
249. Si la anchura de un rectángulo es 2 cm mayor que la mitad de su longitud, y su perímetro es 40 cm, ¿Cuáles son sus dimensiones?
250. El lado más largo de un triángulo es el doble del más corto y 2 cm más largo que el tercer lado. Si el perímetro del triángulo es 33 cm, ¿Cuál es la longitud de cada lado?
251. Los boletos de admisión a un cine valen \$4 (dólares) para adultos y \$3 para estudiantes. Si se

vendieron 810 boletos y los ingresos totales fueron \$2 853, ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

252. Un parquímetro acepta monedas de 5 y 10 centavos (de dólar). Al vaciar la caja se encontraron 148 monedas con un total de \$10.65. ¿Cuántas monedas de cada tipo había?
253. Las utilidades de un negocio son compartidas por tres socios. El primero recibe el doble que el segundo y éste recibe el triple que el tercero. Si las utilidades del año anterior fueron \$26 400. ¿Cuánto recibirá cada socio?
254. Una mujer invierte \$25 000 (dólares) en dos negocios. El año pasado tuvo utilidades del 15% en el primero y perdió 5% en el segundo. Si el ingreso del año de los dos negocios fueron equivalentes a una tasa de 8% de la totalidad de su inversión, ¿Cuánto invirtió en cada negocio?
255. Un inversionista desea obtener un rendimiento de 12% sobre el total de dos inversiones. Si tiene \$10 000 invertidos al 10%, ¿Cuánto dinero adicional deberá invertir al 16%?
256. Un comerciante al menudeo invirtió \$6 500 en tres tipos de cámaras fotográficas. La utilidad de las ventas de la cámara A es 25%; la de la cámara B es 12% y en la cámara C incurrió en pérdidas del 1% sobre las ventas. Si el comerciante invirtió cantidades iguales en la cámara A y B y la utilidad

total de su inversión fue de 14%, ¿Cuánto invirtió en cada tipo de cámara?

257. Una aleación contiene 80% de oro (en peso) y otro contiene 55% de oro. ¿Cuántos gramos de cada aleación se deben combinar para obtener 40 g de una aleación con 70% de oro?
258. ¿Cuántas libras de una solución de sal al 35% y cuantas de otra al 14% de debe mezclar para obtener 50 lb de la solución de sal al 20%.
259. Se desea mezclar té que vale \$4.10 (dólares por libra con otro que vale \$4.90 por libra ¿Cuántas libras de cada uno se deben usar para obtener 25 lb de una mezcla que valga \$4.40 por libra?
260. Un perfume que se vende a \$80 (dólares) la onza (oz) se va a mezclar con otro que se vende a \$104 por onza. Si se desea 270 oz de la mezcla, ¿Cuánto se deberá mezclar de cada clase de perfume?
261. Un radiador contiene 25 cuartos de galón de agua y solución anticongelante, de la cual 60% (en volumen) es anticongelante, ¿Cuánta solución debe extraerse y reemplazarse con agua para que la nueva solución tenga 40% de anticongelante?
262. Determine cuánta agua se requiere para diluir 15 litros (L) de una solución que tiene 12% de un colorante para obtener una solución al 5%?
263. ¿Cuánta agua debe evaporarse de 15 L de la solución de colorante al 12% del Ejercicio 262 para obtener una solución al 20%? Suponga que la

cantidad total de colorante no se por el proceso de evaporación.

264. Un jardinero tiene 26 kg de una mezcla de fertilizante y exterminador de malezas. Si 1 kg de la mezcla se reemplaza con exterminador, el resultado es una mezcla con 5% de dicho material. ¿Qué porcentaje de la mezcla original era exterminador de maleza?

2.19.6.ECUACIONES CUADRÁTICAS

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

265. $x^2 = 49$

266. $25x^2 - 16 = 0$

267. $5t^2 - 12 = 0$

268. $3y^2 - 5 = 0$

269. $4x^2 = x$

270. $\frac{1}{6}x^2 + x = 0$

271. $x^2 = 8x - 15$

272. $y^2 - 11y + 28 = 0$

273. $8w^2 + 10w - 3 = 0$

274. $14x^2 - x - 3 = 0$

275. $49x^2 + 84x + 36 = 0$

276. $64y^2 - 80y + 25 = 0$

277. $\frac{3t}{3t+4} + \frac{2}{5} = \frac{t}{3t-4}$

278. $\frac{32}{x^2+3x+2} - 3 = \frac{x-3}{x+1}$

Resolver las siguientes ecuaciones usando la formula cuadrática.

$$279. x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$280. x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$281. 2x + 2 = x^2$$

$$282. x^2 + 1 = 6x$$

$$283. 5y^2 - 4y - 2 = 0$$

$$284. 4s^2 - 10s + 5 = 0$$

$$285. x^2 + \frac{1}{2} = x$$

$$286. \frac{x^2}{4} + 2 = x$$

$$287. t^2 - 4t + 7 = 0$$

$$288. 25y^2 - 20y + 7 = 0$$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando los métodos estudiados.

$$289. \begin{cases} x - y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$290. \begin{cases} y = 8 + 2x \\ 6x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$291. \begin{cases} 2x + y = 6 \\ 8x = 6y + 9 \end{cases}$$

$$292. \begin{cases} 9x - 3y = 7 \\ y = 3x - \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$293. \begin{cases} y = 3x - 4 \\ 6x - 3y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$294. \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$$

$$295. \begin{cases} 4x - 5y - 7 = 0 \\ x = \frac{1}{2}y + 5 \end{cases}$$

$$296. \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x + 5y = 2 \end{cases}$$

$$297. \begin{cases} 2x + 6y = -11 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$$

$$298. \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases}$$

Resolver los siguientes problemas de sistemas de ecuaciones usando el método de sustitución o el método de suma y resta.

$$299. \begin{cases} 5x - 2y - 5 = 0 \\ 3x + y - 3 = 0 \end{cases} \quad 300. \begin{cases} 3x + 4y - 4 = 0 \\ 5x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$301. \begin{cases} 4x + 3y + 6 = 0 \\ 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \quad 302. \begin{cases} 8x - 3y = 5 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$303. \begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ x + 9y = 2 \end{cases} \quad 304. \begin{cases} 5x + 6y = -5 \\ 15x - 3y = 13 \end{cases}$$

$$305. \begin{cases} 3x + 4y - 4 = 0 \\ 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad 306. \begin{cases} 18x + 3y - 10 = 0 \\ 2x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$307. \begin{cases} 8x + 5y = 3 \\ 7x + 3y = -7 \end{cases} \quad 308. \begin{cases} 2x - 5y = -21 \\ 5x + 3y = -6 \end{cases}$$

Resolver los siguientes problemas de planteamiento de ecuaciones.

309. Se tiene que 3 lb de té y 8 lb de café cuestan en conjunto \$39.70 y 5 lb de té y 6 lb de café cuestan también en conjunto \$47.10. ¿Cuál es el costo por libra de té y de café?

310. El costo de envío de un telegrama se basa en una tarifa base para las primeras 10 palabras y un cargo adicional por cada palabra que sobrepase de 10. Si un telegrama de 15 palabras cuesta \$11.65 y uno de 19 palabras cuesta \$14.57. ¿cuál es la tarifa base y cuál es el cargo por palabra adicional?

311. Un grupo de damas decide aportar cantidades iguales para contratar los servicios de un conferenciante. Si hubiera 10 damas más, cada una pagaría \$2 menos. Sin embargo, si el número fuera 5 menos, cada una pagaría \$2 más. ¿Cuántas damas forman el grupo y cuanto se le paga al conferenciante?
312. Una mujer ha invertido una suma de dinero, si hubiera invertido \$6000 más a una tasa de 1% más baja, hubiera obtenido el mismo ingreso anual que con su inversión. Además, si hubiera invertido \$4500 menos o una tasa de 1% mayor, su ingreso anual también hubiera sido el mismo. ¿Cuánto invirtió y a qué tasa?
313. Un químico cuenta con dos soluciones ácidas. Una contiene 15% de ácido, y la otra, 6%. ¿Cuántos centímetros cúbicos de cada solución debe usar para obtener 400 cm^3 de una solución con 9% de ácido?
314. Un tanque contiene una mezcla de insecticida líquido y agua en la que hay 5 gal (galones) de insecticida y 25 gal de agua. Un segundo tanque también contiene 5 gal de insecticida, pero solo 15 gal de agua. Se desea contar con 7.5 gal de una mezcla al 20% de insecticida ¿Cuántos galones se deberán tomar de cada tanque?

315. Un bote recorre en 15 min una distancia de 5 mi corriente abajo, pero necesita 20 min para el viaje de regreso. Calcule la velocidad del bote en agua inmóviles y la velocidad de la corriente.
316. Un avión recorre una distancia de 1 980 mi en 6 h cuando vuela en la dirección del viento, pero necesita 7 h 20 min para efectuar el vuelo de regreso. Calcule la velocidad del avión en aire tranquilo y la velocidad del viento.
317. Un hombre necesita 23 min más que su hijo para trotar 5 min. Sin embrago, si el hombre duplica su velocidad, puede recorrer la misma distancia en un minuto menos que su hijo. ¿Cuál es la velocidad del hombre y cuál es la de su hijo?
318. La distancia entre dos automóviles es 140 km. Si los autos corren en direcciones contrarias, les tomará 48 min encontrarse. Sin embrago, si se desplazan en la misma dirección, se encontrarán en 4 h. ¿Cuáles son las velocidades de los automóviles?

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.

$$319. \begin{cases} 4x + 3y + z = 15 \\ x - y - 2z = 2 \\ 2x - 2y + z = 4 \end{cases} \quad 320. \begin{cases} 2x + 3y + z = 8 \\ 5x + 2y - 3z = -13 \\ x - 2y + 5z = 15 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
321. \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x + 2y - z = 5 \\ 5x + 2z = 7 \end{cases} & 322. \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 3x + y + 3z = -2 \\ 6x - 3y - 2z = -6 \end{cases} \\
323. \begin{cases} x + \frac{1}{3}(y - z) = -1 \\ y - \frac{1}{2}(z - 2x) = 1 \\ z - \frac{1}{4}(2x - y) = -2 \end{cases} & \\
324. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 4 \\ 7x + 5y - z = 9 \\ x + 9y - 9z = 1 \end{cases} & 325. \begin{cases} 2x - 3y - 5z = 4 \\ x + 7y + 6z = -7 \\ 7x - 2y - 9z = 6 \end{cases} \\
326. \begin{cases} 3x - 5y + 2z = -2 \\ 2x \quad \quad + 3z = -3 \\ \quad \quad 4y - 3z = 8 \end{cases} & 327. \begin{cases} x - y = 2 \\ 3y + z = 1 \\ x - 2z = 7 \end{cases} \\
328. \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ z - y = 5 \\ z - 2x = 5 \end{cases} &
\end{array}$$

Resolver los siguientes problemas de planteamiento de ecuaciones.

329. Una parte de \$25 000 se invierte al 10%, otra parte al 12%, y una tercera al 16%. El ingreso anual total por estas tres inversiones es \$3 200. Además, el ingreso de la inversión al 16% es el mismo valor que los ingresos combinados de las otras dos inversiones. ¿Cuánto se ha invertido según cada tasa de interés?
330. Si la temperatura de ebullición del agua a una

altitud h pies (sobre el nivel del mar) es t grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$), entonces, $h = a + bt + ct^2$. Sabiendo que el agua hierve a 100°C al nivel del mar, a 95° a una altitud de 7 400 pie, y a 90°C a 14 550 pies, determine a , b y c .

331. En 20 oz de una aleación hay 6 oz de cobre (Cu), en 4 oz de zinc (Zn) y 10 oz de plomo (Pb). En 20 oz de una segunda aleación hay 12 oz de Cu, 5 oz de Zn y 3 de Pb, mientras que en 20 oz de una tercera aleación hay 8 oz de Cu, 6 oz de Zn y 6 de Pb. ¿Cuántas onzas de cada aleación tendrán que combinarse para obtener una aleación que contenga 34 oz de Cu, 17 oz de Zn y 19 oz de Pb?
332. Una persona invierte un total de \$50 000 en tres diferentes tipos de acciones que pagan dividendos anuales de 8%, 10% y 12%. Si el ingreso anual total por los tres paquetes accionarios es \$5 320, y el ingreso por las acciones al 12% es de \$1 080 más que el de las de 10% ¿Cuál es la cantidad invertida en cada tipo de acciones?

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$333. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$334. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$335. \begin{cases} x^2 - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$336. \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

$$337. \begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \quad 338. \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 9 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$339. \begin{cases} x^2 - y - 4 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \quad 340. \begin{cases} 4x^2 + y - 3 = 0 \\ 8x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$341. \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \quad 342. \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 + y = 5 \end{cases}$$

$$343. \begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ xy = 4 \end{cases} \quad 344. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$$345. \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + 2y = 4 \end{cases} \quad 346. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$347. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + 4y^2 = 64 \end{cases} \quad 348. \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 59 \\ 2x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

$$349. \begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ y^2 - 2x = 6 \end{cases} \quad 350. \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 9x^2 - 4y^2 = 6 \end{cases}$$

$$351. \begin{cases} x^2 - xy + 4 = 0 \\ 2x^2 - 2xy + y^2 = 8 \end{cases}$$

$$352. \begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 0 \\ xy = 9 \end{cases}$$

$$353. \begin{cases} 10x^2 - xy + 4y^2 = 28 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$$

$$354. \begin{cases} 4x^2 - 5xy + 3y^2 = 24 \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 16 \end{cases}$$

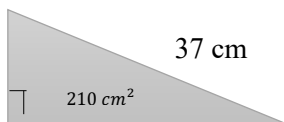
$$355. \begin{cases} \frac{7}{x^2} - \frac{8}{y^2} = 5 \\ \frac{3}{x^2} - \frac{4}{y^2} = 2 \end{cases}$$

$$356. \begin{cases} \frac{3}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 7 \\ \frac{5}{x^2} - \frac{2}{y^2} = -3 \end{cases}$$

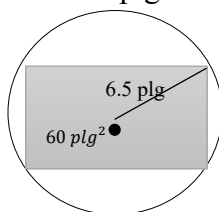
357. La suma de los recíprocos de dos números es $\frac{4}{15}$, y su producto, 60. ¿Cuáles son estos números?

358. La suma de los cuadrados de dos números es $\frac{5}{18}$ y la suma de 6 veces el más pequeño y 4 veces el más grande es 3. ¿Cuáles son estos números?

359. La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 37 cm y su área es de 210 cm^2 . Obtenga las longitudes de los catetos.



360. Determine las dimensiones de un rectángulo de 60 plg^2 de área que está inscrito en una circunferencia de 6.5 plg de radio.



Resolver los siguientes ejercicios utilizando el método de determinantes o regla de Cramer.

$$361. \begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 6x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$362. \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$363. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 3 \end{cases}$$

$$364. \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$365. \begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ x + y + z = 4 \\ x - 3y - z = 4 \end{cases}$$

$$366. \begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 3x + 2y = 4 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

$$367. \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 2 \\ \frac{x}{4} - \frac{2y}{3} - \frac{z}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{9} + \frac{z}{2} = 4 \end{cases}$$

$$368. \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{3y}{4} + \frac{z}{3} = \frac{5}{8} \\ \frac{3x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$369. \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 4 \\ x + 2y - 5z = 6 \\ 4x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$370. \begin{cases} w + 3x + y + z = 3 \\ -w - 3y - z = 0 \\ -2w + 3x - 4y + z = 0 \\ -w - 6x - 2y + 2z = -4 \end{cases}$$

$$371. \begin{cases} 2w + x - 3y - 3z = 4 \\ x + 2y + z = -3 \\ 2w - x + 3z = -3 \\ 5w - y + z = -6 \end{cases}$$

$$372. \begin{cases} 2w - 4x + y - 2z = 3 \\ 3w + x + 2y + 3z = 12 \\ w - 4x + 2y - 6z = 1 \\ 5w + x + 11z = 16 \end{cases}$$

$$373. \begin{cases} 2w + 3x - 4y - z = 3 \\ 3w + x + y + 2z = 1 \\ w - 2x + 3y - z = 0 \\ w - 2x - y - 9z = 5 \end{cases}$$

$$374. \begin{cases} 4w + x - 2y + z = 4 \\ 2w + 3x + 4y - 3z = -2 \\ 3w - 2x + 5y + 3z = 2 \\ w + 4x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

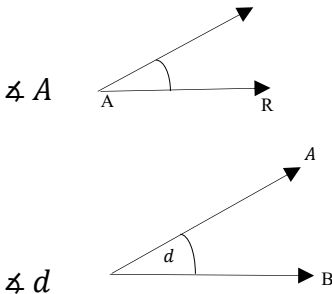
UNIDAD III: TRIGONOMETRÍA

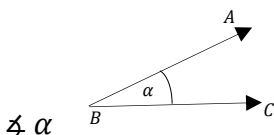
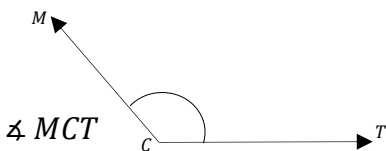
La trigonometría es la parte de la matemática que se encarga del estudio de las figuras geométricas, la relación entre sus ángulos y sus lados. Se basa fundamentalmente en el estudio de las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

3.1. MEDIDAS DE ANGULOS

Un ángulo se forma por la intersección de dos semirrectas llamados lados, el punto de intersección se conoce con el nombre de vértice.

A un ángulo se lo nombra con una letra mayúscula o minúscula del abecedario, también con una letra del alfabeto griego o nombrando las letras que forman el ángulo de tal manera que la letra central representa el vértice del ángulo ejemplos:





La medida de un ángulo es la amplitud del arco de circunferencia centrada en el vértice y delimitada por sus lados. Un ángulo se puede medir en grados, minutos, segundos, radianes, vueltas.

Un ángulo se considera positivo cuando es medido en sentido anti horario y negativo cuando se mide en sentido horario.

Se puede transformar las unidades de medida según convenga para la solución de ejercicios utilizando las siguientes equivalencias:

$$\text{Una vuelta} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$1^\circ = 60 \text{ minutos}$$

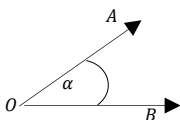
$$1 \text{ minutos} = 60 \text{ segundos}$$

Observación. - los minutos y segundos que aparecen como medidas de los ángulos no es medida del tiempo sino más bien medida de los grados sexagesimales.

Se presentan los siguientes tipos de ángulos:

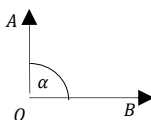
Según su medida

- **Ángulo agudo:** Mide entre 0° y 90°



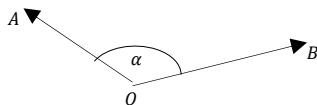
$\nexists \alpha$ es ángulo agudo $\Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$

- **Ángulo recto:** Mide 90°



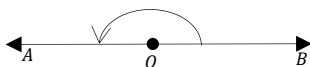
$\nexists \alpha$ es ángulo recto $\Leftrightarrow \alpha 90^\circ$

- **Ángulo obtuso:** Mide más de 90° y menos de 180°



$\angle \alpha$ es ángulo obtuso $\Leftrightarrow 90^\circ < \angle \alpha < 180^\circ$

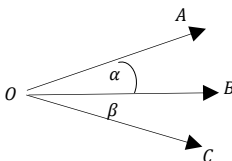
- **Ángulo llano:** Mide 180°



$\angle A O B$ es ángulo llano $\Rightarrow \angle A O B = 180^\circ$

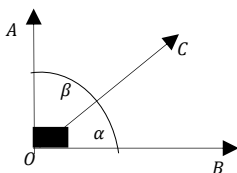
Según su relación con otros ángulos

- **Ángulos consecutivos:** Comparten el vértice y un lado



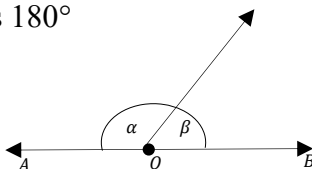
Los ángulos α y β son consecutivos tienen el mismo vértice O y comparten el lado $\overline{OB}$

- **Ángulos complementarios:** La suma de sus medidas es 90°



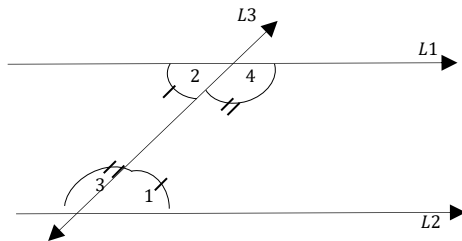
Los ángulos α y β son ángulos complementarios porque: $\angle \alpha + \angle \beta = 90^\circ$

- **Ángulos suplementarios:** La suma de sus medidas es 180°



Los ángulos α y β son ángulos suplementarios porque: $\angle \alpha + \angle \beta = 180^\circ$

Ángulos alternos internos: Son aquellos que se ubica entre dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal y se encuentran de diferente lado de esta y al interior de las rectas paralelas. Estos ángulos son iguales o congruentes.



Donde:

$L1 \parallel L2$ se lee: L1 es paralela a L2

L3 es recta transversal

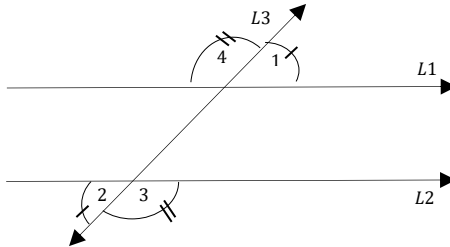
$\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos alternos internos por lo tanto son iguales.

$$\angle 1 = \angle 2$$

$\angle 3$ y $\angle 4$ son ángulos alternos internos por lo tanto son iguales.

$$\angle 3 = \angle 4$$

Ángulos alternos externos: Son aquellos que se ubica entre dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal y se encuentran de diferente lado de esta y al exterior de las rectas paralelas. Estos ángulos son iguales o congruentes.



Donde:

$L1 \parallel L2$ se lee: L1 es paralela a L2

L3 es recta transversal

$\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos alternos externos por lo tanto son iguales.

$$\angle 1 = \angle 2$$

$\angle 3$ y $\angle 4$ son ángulos alternos externos por lo tanto son iguales.

$$\angle 3 = \angle 4$$

Ejercicios:

1. Expresar $3,5 \text{ rad}$ en grados sexagesimales

Solución:

Utilizamos la equivalencia: $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$

$$3,5 \text{ rad} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{3,5 \times 360^\circ}{2\pi} = 200,64^\circ$$

2. Transformar $70^\circ 8 \text{ min } 20 \text{ seg}$ a radianes.

Solución:

Transformamos los segundos y minutos a grados así:

$$\cancel{20 \text{ seg}} \quad \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ seg}} = \frac{2 \text{ seg}}{6} = 0,33 \text{ min}$$

$$8 \text{ min} + 0,33 \text{ min} = 8,33 \text{ min}$$

$$8,33 \text{ min} \quad \frac{1^\circ}{60 \text{ min}} = \frac{8,33^\circ}{60} = 0,14^\circ$$

$$70^\circ + 0,14^\circ = 70,14^\circ$$

$$70,14^\circ \quad \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{140,28\pi \text{ rad}}{360^\circ} = 0,39\pi \text{ rad} = 1,22 \text{ rad}$$

3. Si uno de los ángulos complementarios mide 28°
¿cuánto medirá el otro ángulo?

Solución:

Por definición de ángulos complementarios
tenemos:

$$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta = 90^\circ$$

$$28^\circ + \sphericalangle \beta = 90^\circ$$

$$\sphericalangle \beta = 90^\circ - 28^\circ$$

$$\sphericalangle \beta = 62^\circ$$

3.2. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas se utilizan para la resolución de triángulos rectángulos, estas funciones se las considera una **razón trigonométrica** porque se expresa como un cociente de dos expresiones.

Las funciones trigonométricas son las siguientes:

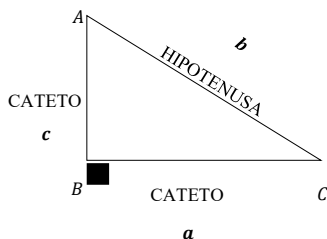
seno α , coseno α , tangente α , cotagente α , secante α y cosecante α cuya simbología respectivamente es:

sen α , cos α , tan α , ctg α , sec α , csc α , de estas funciones las tres últimas son las correspondientes inversas de las tres primeras.

Se llama triángulo rectángulo a la figura formada por tres lados, dos de los cuales forman el ángulo recto y se denominan catetos y el tercer lado es la hipotenusa.

Se llama cateto opuesto al lado del triángulo que está frente al ángulo agudo que vamos a obtener sus funciones trigonométricas, y cateto adyacente al cateto sobrante.

Generalmente a los ángulos del triángulo rectángulo se lo nombre con una letra mayúscula del abecedario y a los catetos e hipotenusa con la correspondiente letra minúscula del ángulo al cual se oponen.



3.2.1. DEFINICIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

La función trigonométrica seno de un ángulo se define así:

$$\text{sen} \angle A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

La función trigonométrica coseno de un ángulo se define así:

$$\text{cos} \angle A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

La función trigonométrica tangente de un ángulo se define así:

$$\text{tan} \angle A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$$

La función trigonométrica cotangente de un ángulo es la función inversa de la función tangente se define así:

$$\operatorname{ctg} \angle A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

La función trigonométrica secante de un ángulo es la función inversa de la función trigonométrica coseno y se define así:

$$\sec \angle A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

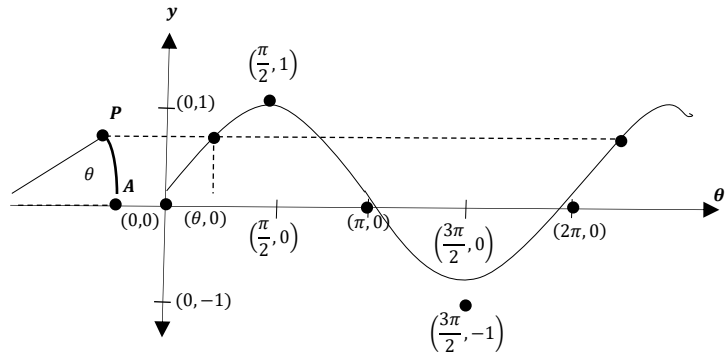
La función trigonométrica cosecante de un ángulo es la función inversa de la función trigonométrica seno y se define así:

$$\operatorname{csc} \angle A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

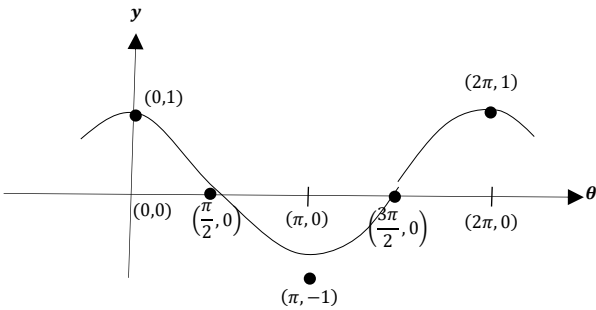
Gráficas de las funciones $\text{sen}\theta$, $\text{cos}\theta$ y $\text{tan}\theta$

Cuadrante en que está $P(\theta)$	θ varía de	$\text{sen}\theta$ varía de	$\text{cos}\theta$ varía de
I	$0 \text{ a } \pi/2$	$0 \text{ a } 1$	$1 \text{ a } 0$
II	$\pi/2 \text{ a } \pi$	$1 \text{ a } 0$	$0 \text{ a } -1$
III	$\pi \text{ a } 3\pi/2$	$0 \text{ a } -1$	$-1 \text{ a } 0$
IV	$3\pi/2 \text{ a } 2\pi$	$-1 \text{ a } 0$	$0 \text{ a } 1$

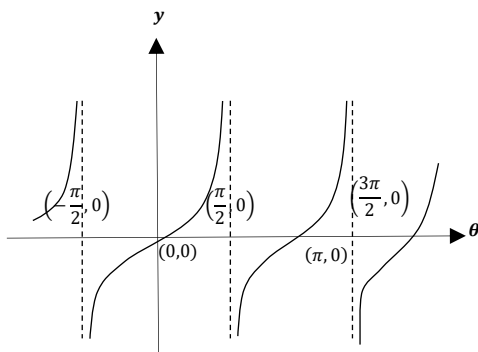
Gráfica de la función $\text{sen}\theta$



Gráfica de la función $\text{cos}\theta$



Gráfica de la función $\tan\theta$



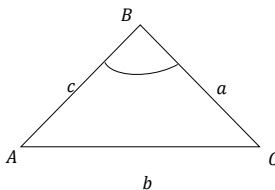
Teorema de Pitágoras

Se utiliza para calcular los lados de un triángulo rectángulo y dice: “El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”

$$b^2 = a^2 + c^2$$

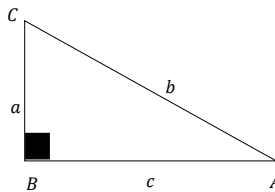
En todo triángulo se cumple que la medida de los ángulos interiores del mismo siempre es igual a 180° .

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$$



En particular en un triángulo rectángulo se cumple que la suma de los dos ángulos agudos es igual a 90° .

$$\angle A + \angle C = 90^\circ$$



Es necesario, además, determinar el área y el perímetro de un triángulo, elementos que se calculan tradicionalmente de la siguiente manera:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}; \quad y \quad P = a + b + c; \quad \text{donde:}$$

A: Es el área del triángulo

b: Es la base del triángulo (a la base de un triángulo se la define como el segmento donde descansa el triángulo)

h: Es la altura del triángulo (en todo triángulo la base y la altura forman un ángulo de 90°)

P: Es el perímetro del triángulo y se calcula sumando las longitudes de sus lados.

a, b, c: Son los lados del triángulo.

Resolver un triángulo significa encontrar el valor de sus lados sus ángulos, el área y el perímetro.

Cuando se resuelve un triángulo con las funciones trigonométricas se obtiene la respuesta en función de las mismas, nos interesa saber el valor del ángulo que generó esa función por lo que se utiliza la función arco (arc) o

función inversa. Ejemplo: $\arcsen A = \text{sen}^{-1} A = N^\circ$; $\arccos A = \text{cos}^{-1} A = M^\circ$; $\arctan A = \text{tan}^{-1} A = S^\circ$, y así con las restantes funciones.

N, M, S son números que pertenecen al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

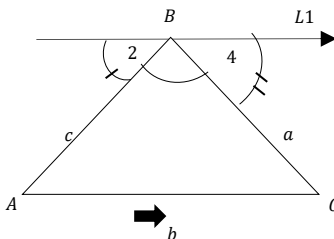
Veamos unos ejemplos numéricos:

$$\begin{aligned} \text{sen} A &= 0,5; & A &= \arcsen 0,5; & A &= 30^\circ \\ \text{cos} A &= 0,78; & A &= \text{cos}^{-1} 0,78; & A &= 38,74^\circ \\ \text{tan} B &= 1,28; & B &= \text{tan}^{-1} 1,28; & B &= 52^\circ \end{aligned}$$

Ejercicio:

1. Demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°

Solución:



$\angle A, \angle B, \angle C$ son ángulos internos del $\triangle ABC$

- 1) Trazamos una recta L paralela al lado AC que pase por el vértice B.

- 2) Se ha formado los siguientes ángulos iguales por ser ángulos alternos internos.

$$\angle A = \angle 2$$

$$\angle C = \angle 4$$

- 3) En la recta L se observa que se forma un ángulo llano (180°), por lo tanto, la de los ángulos sería:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

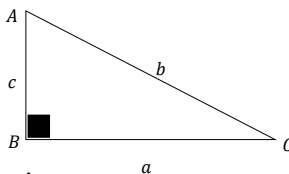
3.3. RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTÁNGULOS

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto (90°), el mismo que se forma por la intersección de los dos catetos y el tercer lado es la hipotenusa.

Ejercicios:

- Se conoce que los catetos de un triángulo rectángulo con 8 y 5 cm respectivamente. Resolver el triángulo.

Solución:



- Datos e incógnitas

$$a = 8; c = 5; \angle B = 90^\circ \quad b = ?; \angle A = ?; \angle C = ?; \quad A = ?; \quad P = ?$$

- Utilizando el Teorema de Pitágoras calculemos el valor de la hipotenusa:

$$b^2 = a^2 + c^2; \text{ despejando la } b \text{ sería:}$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2}; \text{ reemplazando los datos:}$$

$$b = \sqrt{8^2 + 5^2}; \quad b = 9,43 \text{ cm}$$

- Calculemos un ángulo agudo utilizando la función trigonométrica seno.

$$\text{sen} \angle A = \frac{a}{b}; \quad \text{sen} \angle A = \frac{8}{9,43}; \quad \text{sen} \angle A = 0,85$$

$$\angle A = \text{sen}^{-1} 0,85 = 58,21^\circ$$

- Aplicando la definición: “la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 90° ”

Entonces:

$$\angle A + \angle C = 90^\circ; \text{ despejando:}$$

$$\angle C = 90^\circ - \angle A; \quad \angle C = 90^\circ - 58,21^\circ$$

$$\angle C = 31,79^\circ$$

- Calculemos el perímetro del triángulo:

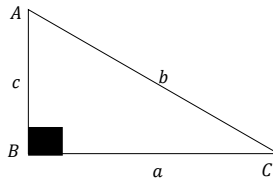
$$P = a + b + c; \quad P = 5 \text{ cm} + 9,43 \text{ cm} + 8 \text{ cm};$$

$$P = 22,43 \text{ cm}$$

- Calculemos el área del triángulo.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}; \quad A = \frac{5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}}{2}; \quad A = 20 \text{ cm}^2$$

2. Resolver un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 15 m y uno de sus catetos 7 m.



- Datos e incógnitas
 $b = 15m$; $c = 7m$; $\angle B = 90^\circ$; $a = ?$; $\angle A = ?$; $\angle C = ?$; $P = ?$; $A = ?$
- Calculemos el valor del cateto a utilizando el Teorema de Pitágoras:
 $b^2 = a^2 + c^2$; despejando a :
 $a = \sqrt{b^2 - c^2}$; reemplazando los datos:
 $a = \sqrt{15^2 - 7^2}$; $a = 13,27 \text{ m}$
- Calculemos el valor de un ángulo agudo utilizando la función tangente:
 $\tan \angle A = \frac{a}{c}$; $\tan \angle A = \frac{13,27}{7}$; $\tan \angle A = 1,90$
 $\angle A = \tan^{-1} 1,90$; $\angle A = 62,19^\circ$
- Calculemos el otro ángulo agudo utilizando:
 $\angle A + \angle C = 90^\circ$; $\angle C = 90^\circ - 62,19^\circ$;
 $\angle C = 27,81^\circ$
- Calculemos el perímetro:
 $P = a + b + c$
 $P = 13,27m + 15m + 7m$; $P = 35,27m$
- Calculemos el área:
 $A = \frac{b \cdot h}{2}$; $A = \frac{13,27m \times 7m}{2}$; $A = 46,45m^2$

3.3.1. APLICACIONES DE LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS PARA OBTENER LOS VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 45° , 30° Y 60°

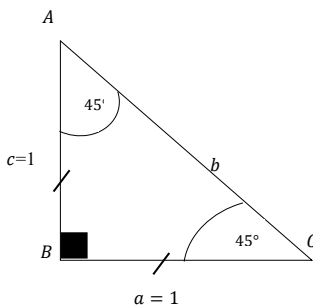
Los valores que se obtienen de las funciones trigonométricas de los ángulos de 45° , 30° y 60° son valores expresados en números enteros y que es conveniente recordarlos para encontrar soluciones ágiles cuando se presentan problemas de triángulos rectángulos con estos valores que prácticamente se los considera como constantes.

Determinar todas las funciones trigonométricas del ángulo de 45° .

Procedimiento:

- Se dibuja un triángulo rectángulo isósceles, en este caso daremos el valor de una unidad a los catetos y calcularemos el valor de la hipotenusa.

Definición. -Triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados iguales por lo tanto los ángulos que se oponen a estos lados también son iguales, lo que quiere decir que cada uno de ellos tendría en valor de 45° .



$\triangle ABC$ es isósceles porque $a = c = 1$; $\angle A = 45^\circ$ y $\angle C = 45^\circ$; $b = ?$

- Aplicando el Teorema de Pitágoras

$$b^2 = a^2 + c^2; \quad b = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$b = \sqrt{1^2 + 1^2}; \quad b = \sqrt{2}$$

- Calculamos las funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \angle A = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{sen} \angle A = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \operatorname{sen} \angle A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \angle A = \frac{c}{b}; \quad \cos \angle A = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos \angle A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \angle A = \frac{a}{c}; \quad \tan \angle A = \frac{1}{1}; \quad \tan \angle A = 1$$

$$\operatorname{ctg} \angle A = \frac{c}{a}; \quad \operatorname{ctg} \angle A = \frac{1}{1}; \quad \operatorname{ctg} \angle A = 1$$

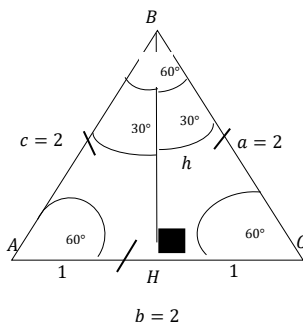
$$\sec \angle A = \frac{b}{c}; \quad \sec \angle A = \frac{\sqrt{2}}{1}; \quad \sec \angle A = \sqrt{2}$$

$$\csc \angle A = \frac{b}{a}; \quad \csc \angle A = \frac{\sqrt{2}}{1}; \quad \csc \angle A = \sqrt{2}$$

Determinar todas las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

Procedimiento.

- Se dibuja un triángulo equilátero, cuyos lados tendrán por medida dos unidades sobre este triángulo se graficará la altura para dividir al triángulo original en dos triángulos rectángulos:



Definición. – Un triángulo equilátero es aquel que tiene tres lados y sus tres ángulos iguales, por lo tanto:

$$a = b = c$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

En un triángulo equilátero la altura divide en dos triángulos rectángulos congruentes y divide al lado en dos partes iguales.

En este caso tenemos los ángulos de 30° y 60° en el mismo triángulo.

- $\triangle ABC$ Es un triángulo equilátero:

$$a = b = c = 2u$$

$$AH = 1u \text{ y } HC = 1u$$

h es la altura del $\triangle ABC$

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

$$\angle HBC = \angle HBA = 30^\circ$$

- Al trazar la altura $\overline{BH}$ se han formado 2 triángulos rectángulos: $\triangle ABH$ y $\triangle CBH$, trabajaremos en el $\triangle ABH$:
- Calculemos la altura h aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{c^2 - \overline{AH}^2}; \quad h = \sqrt{2^2 - 1^2}; \quad h = \sqrt{3}$$

- Calculemos las funciones trigonométricas

$$\text{sen}30^\circ = \frac{\overline{AH}}{c}; \quad \text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos}30^\circ = \frac{h}{c}; \quad \text{cos}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tan}30^\circ = \frac{\overline{AH}}{h}; \quad \text{tan}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \text{tan}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg30^\circ = \frac{h}{AH}; \quad ctg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1}; \quad ctg = \sqrt{3}$$

$$sec30^\circ = \frac{c}{h}; \quad sec30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad sec30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$csc30^\circ = \frac{c}{AH}; \quad csc30^\circ = \frac{2}{1}; \quad csc30^\circ = 2$$

- De igual manera en el mismo triángulo calculamos las funciones trigonométricas del ángulo de 60°

$$sen60^\circ = \frac{h}{c}; \quad sen60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos60^\circ = \frac{AH}{c}; \quad cos60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$tan60^\circ = \frac{h}{AH}; \quad tan60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1}; \quad tan60^\circ = \sqrt{3}$$

$$ctg60^\circ = \frac{AH}{h}; \quad ctg60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad ctg60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sec60^\circ = \frac{c}{AH}; \quad sec60^\circ = \frac{2}{1}; \quad sec60^\circ = 2$$

$$csc60^\circ = \frac{c}{h}; \quad csc60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad csc60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

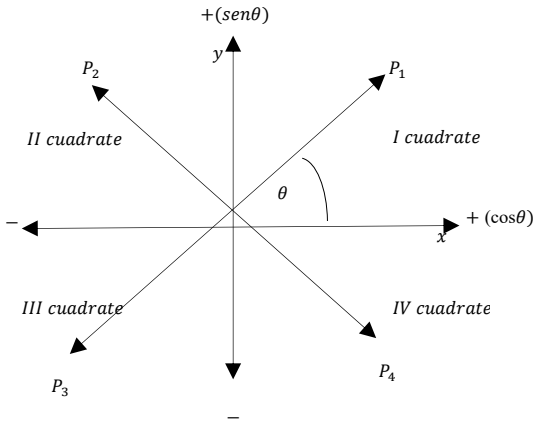
Estos resultados podemos resumirlos en el siguiente cuadro.

ÁNGULO	$sen\angle A$	$cos\angle A$	$tan\angle A$	$ctg\angle A$	$sec\angle A$	$csc\angle A$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
------------	----------------------	---------------	------------	----------------------	---	-----------------------

De los valores de esta tabla podemos concluir que: La función trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la respectiva co-función del ángulo complementario.

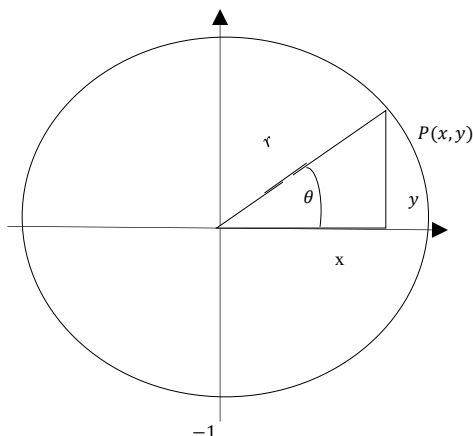
3.4. SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL PLANO CARTESIANO



CUADRANTE	Seno	Coseno	Tangente	CLAVE
I	+	+	+	Todas
II	+	-	-	SIN
III	-	-	+	TAN
IV	-	+	-	COS

La CLAVE es la que generalmente se utiliza para recordar los cuadrantes en los que las funciones trigonométricas llevan signo positivo.

3.5. RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS



En el círculo trigonométrico se ha dibujado un triángulo rectángulo cuyos catetos corresponden a los valores correspondientes a x e y , y la hipotenusa r , aplicando las funciones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras tenemos:

Teorema de Pitágoras:

$$y^2 + x^2 = r^2$$

Dividiendo para r^2 a ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

lo anterior es igual a tener:

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \left(\frac{r}{r}\right)^2$$

Por otro lado, aplicando las funciones trigonométricas $\text{sen}\theta$ y $\text{cos}\theta$ en el triángulo del círculo trigonométrico tenemos:

$$\text{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad y \quad \text{cos}\theta = \frac{x}{r}$$

Reemplazando estos valores en la expresión anterior:

$$(\text{sen}\theta)^2 + (\text{cos}\theta)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$$

Por otro lado, si en el mismo triángulo del círculo trigonométrico volvemos a escribir el Teorema de Pitágoras:

$$y^2 + x^2 = r^2$$

A esta expresión le vamos a dividir para x^2 a ambos miembros:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{\overset{1}{\cancel{x^2}}}{\cancel{x^2}} = \frac{r^2}{x^2}$$

Operando sería:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$$

Reemplazando los valores de las funciones trigonométricas:

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

De igual manera se puede obtener otras identidades trigonométricas así:

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Multiplicando: $\sin\theta \cdot \csc\theta = \left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{r}{y}\right)$. Reemplazando y simplificando:

$$\sin\theta \cdot \csc\theta = 1$$

Multiplicando: $\tan\theta \cdot \cot\theta = \left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}\right)$. Simplificando:

$$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$$

Multiplicando: $\cos\theta \cdot \sec\theta = \left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{r}{x}\right)$. Simplificando:

$$\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$$

Como: $\tan\theta = \frac{y}{x}$; Dividiendo para r

$$\tan\theta = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}$$

Sustituyendo por la definición de $\text{sen}\theta$ y $\text{cos}\theta$ se tiene que:

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}$$

De igual forma como: $\text{ctg}\theta = \frac{x}{y}$

Dividiendo para r :

$$\text{ctg}\theta = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}$$

Sustituyendo:

$$\text{ctg}\theta = \frac{\text{cos}\theta}{\text{sen}\theta}$$

3.6. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Según afirman Arroba R., Jorge, Lara P., Jorge, 2014:

“Identidad trigonométrica es una relación de igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidas las funciones”.

Ejemplos:

$$\text{sen}\theta = \frac{1}{\text{csc}\theta}; \quad \text{cos}\theta = \frac{1}{\text{sec}\theta}; \quad \tan\theta = \frac{1}{\text{ctg}\theta}$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

Estas identidades se demuestran utilizando operaciones algebraicas, factorización, reemplazando las relaciones trigonométricas fundamentales según sea el caso.

No existe una metodología única para resolver identidades sin embargo podría señalar algunos criterios que le ayudaran a desarrollar sus propias destrezas y habilidades para demostrar identidades:

- Comience desarrollando el lado de la igualdad que aparente más complejidad.
- Procure convertir todas las funciones en seno y coseno.
- Se recomienda un orden y procesos lógicos, empleando procedimientos matemáticos diversos, a partir de un miembro para obtener el otro.
- Algunos autores recomiendan desarrollar los dos miembros de la identidad para obtener una tercera.

Ejercicios:

1. Demostrar las siguientes identidades:

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

Solución:

$$1 + \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) = \sec^2 \theta; \quad \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta; \quad \sec^2\theta = \sec^2\theta$$

Observación. –En este ejercicio hemos operado únicamente el primer miembro de la igualdad para llegar a obtener el valor del segundo miembro de la misma.

2. Demostrar la siguiente identidad:

$$1 + \operatorname{ctg}^2\theta = \operatorname{csc}^2\theta$$

Solución:

$$1 + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{csc}^2\theta; \quad \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{csc}^2\theta$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{csc}^2\theta; \quad \operatorname{csc}^2\theta = \operatorname{csc}^2\theta$$

3. Demostrar la siguiente identidad:

$$\frac{\operatorname{tag}\theta + \sec\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}}{\cos\theta} &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta} \\ \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta} \\ \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta}$$

$$\frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{(1 - \operatorname{sen}\theta)(1 + \operatorname{sen}\theta)} = \frac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta}$$

$$\frac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta}$$

4. Demostrar la siguiente identidad

$$\tan\theta \cdot \operatorname{sen}\theta = \sec\theta - \cos\theta$$

Solución:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta = \sec\theta - \cos\theta$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \sec\theta - \cos\theta$$

$$\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta} = \sec\theta - \cos\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} = \sec\theta - \cos\theta$$

$$\sec\theta - \cos\theta = \sec\theta - \cos\theta$$

5. Demostrar la siguiente identidad:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta = \operatorname{ctg}\theta \cos\theta$$

Solución:

$$\frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \operatorname{ctg}\theta \cos\theta$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \operatorname{ctg}\theta \cos\theta$$

$$\frac{\cos\theta}{\sen\theta} \cdot \cos\theta = \operatorname{ctg}\theta \cos\theta$$

$$\operatorname{ctg}\theta \cdot \cos\theta = \operatorname{ctg}\theta \cos\theta$$

6. Demostrar la siguiente identidad:

$$\frac{1 - \sen\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1 + \sen\theta}$$

Solución:

$$\frac{(1 - \sen\theta)(1 + \sen\theta)}{\cos\theta(1 + \sen\theta)} = \frac{\cos\theta}{1 + \sen\theta}$$

$$\frac{1 - \sen^2\theta}{\cos\theta(1 + \sen\theta)} = \frac{\cos\theta}{1 + \sen\theta}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1 + \sen\theta)} = \frac{\cos\theta}{1 + \sen\theta}$$

$$\frac{\cos\theta}{1 + \sen\theta} = \frac{\cos\theta}{1 + \sen\theta}$$

3.7. RESOLUCION DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Un triángulo oblicuángulo es aquel que no es triángulo rectángulo, en este conjunto de triángulos se ubican a los triángulos isósceles (dos lados iguales), triángulo equilátero (tres lados iguales), triángulo escaleno (tres lados desiguales).

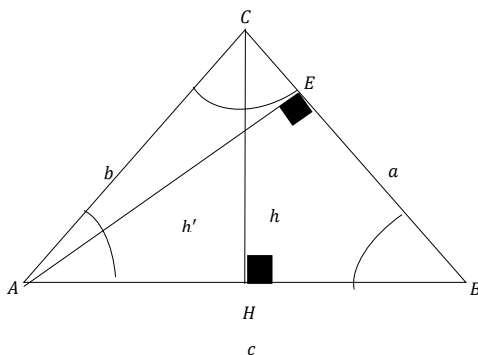
A estos triángulos se los puede convertir en triángulos rectángulos trazando la altura de los mismos como se realizó en ejercicios anteriores de este capítulo, para poderlos resolver aplicando los conocimientos de la resolución de triángulos rectángulos.

Por otro lado, se los debe resolver utilizando otros conceptos como es la Ley de Senos, Ley de Cosenos y Ley de Tangentes

3.7.1 LEY DE SENOS

“Los lados de un triángulo son proporcionales a las funciones senos de los ángulos opuestos”

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$



DEMOSTRACIÓN:

Aplicando la función seno en el ΔAHC

$$\text{sen}A = \frac{h}{b} \rightarrow h = b\text{sen}A$$

Aplicando la función seno en el ΔBHC

$$\text{sen}B = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\text{sen}B$$

Igualando las dos expresiones

$$a\text{sen}B = b\text{sen}A \rightarrow \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B}$$

De igual manera en el ΔAEC

$$\text{sen}C = \frac{h'}{b} \rightarrow h' = b\text{sen}C$$

Aplicando la función seno en el ΔAEB

$$\text{sen}B = \frac{h'}{c} \rightarrow h' = c\text{sen}B$$

Igualando estas dos expresiones:

$$b\text{sen}C = c\text{sen}B \rightarrow \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

Por lo tanto:

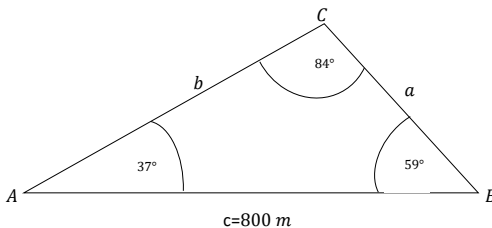
$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

Para aplicar esta Ley se debe tener como datos una de las siguientes condiciones:

- Dos lados y un ángulo
- Dos ángulos y un lado

Ejemplos:

1. Una persona desea trasladarse de un punto A a un punto B que tiene una distancia de 800 m. Cuando se detiene en el punto A mira la punta de una estribación con un ángulo de 37° y cuando se detiene en el punto B mira la misma estribación con un ángulo de 59° . ¿calcular las distancias existentes entre los puntos A y B y la estribación?
Solución:



Debemos calcular el valor de los lados a y b .

Aplicando la Ley de Senos tenemos:

$$\frac{\text{sen}37^\circ}{a} = \frac{\text{sen}84^\circ}{c}$$

Reemplazando datos:

$$\frac{\text{sen}37^\circ}{a} = \frac{\text{sen}84^\circ}{800\text{ m}}; \quad \text{despejando } a \text{ sería:}$$

$$a = \frac{800\text{ m} \cdot \text{sen}37^\circ}{\text{sen}84^\circ}$$

$$a = \frac{800\text{ m} \cdot 0,60}{0,99}$$

$$a = 484,85\text{ m}$$

Calculemos el valor de la distancia b.

$$\frac{b}{\text{sen}B} = \frac{a}{\text{sen}37^\circ}; \quad \text{Reemplazando y despejando } b \text{ sería:}$$

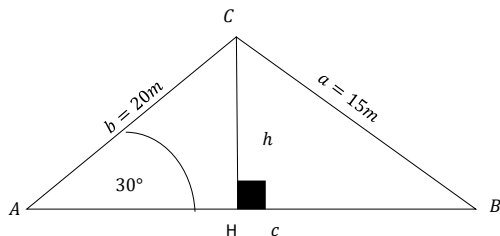
$$b = \frac{484,85\text{ m} \cdot \text{sen}59^\circ}{\text{sen}37^\circ}$$

$$b = \frac{484,85\text{ m} \cdot 0,86}{0,60}$$

$$b = 694,95\text{ m}$$

2. Resolver el triángulo si se conoce que el ángulo A mide 30° y que $a = 15\text{ m}$ y $b = 20\text{ m}$.

Solución:



Apliquemos la Ley de Senos en el ΔABC

$$\frac{a}{\text{sen}30^\circ} = \frac{b}{\text{sen}B}$$

$$\frac{15m}{0,5} = \frac{20m}{\text{sen}B}; \text{Despejando } \text{sen}B \text{ sería:}$$

$$\text{sen}B = \frac{20m \cdot 0,5}{15m}$$

$$\text{sen}B = 0,67$$

$$\sphericalangle B = \text{sen}^{-1}0,67$$

$$\sphericalangle B = 41,81^\circ$$

Calculemos el ángulo C por suma de medidas internas de un triángulo:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$$

$$\sphericalangle C = 180^\circ - 41,81^\circ - 30^\circ$$

$$\sphericalangle C = 108,19^\circ$$

Calculemos el lado c:

$$\frac{c}{\text{sen}C} = \frac{b}{\text{sen}B}$$

$$\frac{c}{\text{sen}108,19^\circ} = \frac{20m}{\text{sen}41,81^\circ}$$

$$c = \frac{20m \cdot \text{sen}108,19^\circ}{\text{sen}41,81^\circ}$$

$$c = \frac{20m \cdot 0,95}{0,67}$$

$$c = 28,36m$$

Como habíamos manifestado anteriormente cuando se dice resolver hay que calcular el perímetro y el área del triángulo, por lo tanto:

$$P = a + b + c$$

$$P = 15m + 20m + 28,36m$$

$$P = 63,36 m$$

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Debemos calcular la altura del triángulo en el ΔAHC aplicando las funciones trigonométricas:

$$\text{sen}A = \frac{h}{b}$$

$$h = \text{sen}30^\circ \cdot 20m$$

$$h = 10m$$

$$A = \frac{28,36m \cdot 10m}{2}$$

$$A = 141,8m^2$$

3. Aplicando la Ley de Senos demostrar que:

$$\frac{\text{sen}A + a}{a} = \frac{\text{sen}B + b}{b}$$

Solución:

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b}$$

$$\frac{\text{sen}A}{a} + 1 = \frac{\text{sen}B}{b} + 1$$

$$\frac{\text{sen}A + a}{a} = \frac{\text{sen}B + b}{b}$$

3.7.2 LEY DE COSENOS

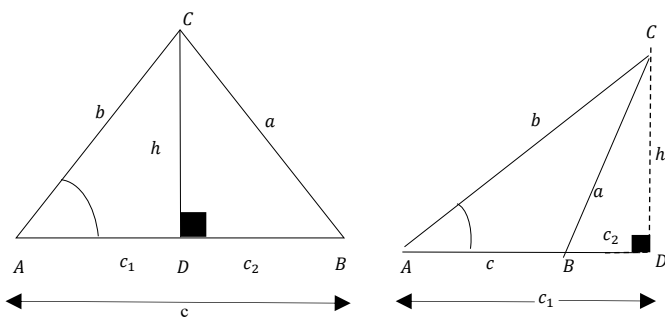
“En un triángulo cualquiera el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos en doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido que lo forman”.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

A estas expresiones también se las conoce como el Teorema de Pitágoras generalizado.



En las figuras anteriores vemos un triángulo oblicuángulo cuya altura cae dentro del mismo y en el otro triángulo la altura está fuera del triángulo la misma que se consigue haciendo la construcción con las líneas entrecortadas.

En los dos triángulos se obtiene por construcción los triángulos ΔCDB en los mismos que aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$a^2 = h^2 + c_2^2$ y en los triángulos rectángulos: ΔCDA :
 $h^2 = b^2 - c_1^2$, reemplazando esta última ecuación en la anterior se obtiene:

$$a^2 = b^2 - (c_1^2 - c_2^2)$$

Si el $\angle B$ es agudo entonces: $c = c_1 + c_2$ y si el $\angle B$ es obtuso se tiene que: $c = c_1 - c_2$

Resolviendo estas ecuaciones se tendría:

$$a^2 = b^2 + c^2 - c[c + (c_1 - c_2)]$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cc_1$$

Como se puede observar en las gráficas anteriores $c_1 = b \cos A$ por lo que al reemplazar tendríamos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

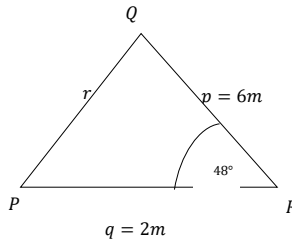
De forma similar podemos llegar a las otras ecuaciones de la Ley de Cosenos, pero es necesario recordar que:

- Si el ángulo comprendido entre los lados es agudo la Ley de Cosenos funciona así:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
- Si el ángulo comprendido entre los lados es obtuso la Ley de Cosenos funciona así:
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

Ejercicios:

1. Si en un triángulo ΔPQR $p = 6m$, $q = 2m$ y el ángulo comprendido entre estos dos lados mide 48° . Calcular el valor del otro lado y el valor de los ángulos.

Solución:



Aplicando la Ley de Cosenos sería:

$$\begin{aligned}r^2 &= p^2 + q^2 - 2pq\cos R \\r^2 &= 6^2 + 2^2 - 2(6)(2)\cos 48^\circ \\r^2 &= 36 + 4 - 24(0,67) \\r^2 &= 23,92\end{aligned}$$

$$r = \sqrt{23,92}$$

$$r = 4,89m$$

Con la misma Ley de Cosenos vamos a calcular el valor de otro ángulo:

$q^2 = p^2 + r^2 - 2pr \cos Q$; despejando $\cos Q$ y reemplazando valores sería:

$$\cos Q = \frac{q^2 - p^2 - r^2}{-2pr}$$

$$\cos Q = \frac{2^2 - 6^2 - 4,89^2}{-2(6)(4,89)}$$

$$\cos Q = \frac{4 - 36 - 23,91}{-58,68}$$

$$\cos Q = \frac{-55,91}{-58,68}$$

$$\cos Q = 0,95$$

$$Q = \cos^{-1} 0,95$$

$$Q = 18,19^\circ$$

Para calcular el tercer ángulo utilizamos la siguiente expresión:

$$\sphericalangle P + \sphericalangle Q + \sphericalangle R = 180^\circ$$

Despejando $\sphericalangle P$ y reemplazando valores sería:

$$\sphericalangle P = 180^\circ - \sphericalangle Q - \sphericalangle R$$

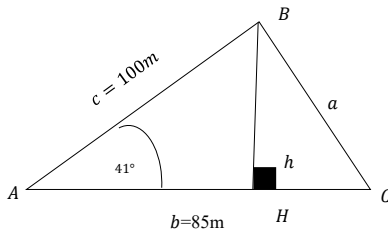
$$\sphericalangle P = 180^\circ - 18,19 - 48^\circ$$

$$\sphericalangle P = 113,81^\circ$$

2. Resolver el triángulo oblicuángulo que tiene los

siguientes datos: $\angle A = 41^\circ$, $b = 85m$, $c = 100m$

Solución:



Calculemos el lado a aplicando la Ley de Cosenos:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cos A$$

$$a^2 = 100^2 + 85^2 - 2(100)(85)\cos 41^\circ$$

$$a^2 = 10000 + 7225 - 12750$$

$$a^2 = 4475$$

$$a = \sqrt{4475}$$

$$a = 66,90m$$

Ahora calculemos el valor del otro ángulo:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$\cos B = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}$$

$$\cos B = \frac{85^2 - 66,90^2 - 100^2}{-2(66,90)(100)}$$

$$\cos B = \frac{-7250,61}{-13380}$$

$$\cos B = 0,54$$

$$B = \cos^{-1} 0,54$$

$$B = 57,32$$

Calculamos el valor del otro ángulo:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\begin{aligned}\angle C &= 180 - \angle B - \angle A \\ \angle C &= 180^\circ - 57,32^\circ - 41^\circ \\ \angle C &= 81,68^\circ\end{aligned}$$

Calculemos la altura del triángulo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} A &= \frac{h}{c} \\ h &= c \cdot \operatorname{sen} A \\ h &= 100 \cdot \operatorname{sen} 41^\circ \\ h &= 65,61m\end{aligned}$$

calculemos el área del triángulo:

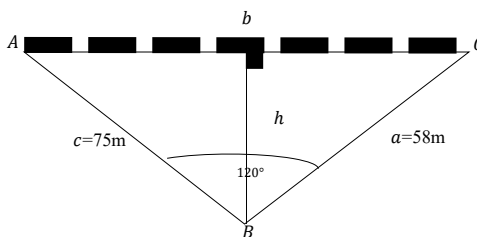
$$\begin{aligned}A &= \frac{b \cdot h}{2} \\ A &= \frac{85m \cdot 65,61m}{2} \\ A &= 2788,43m^2\end{aligned}$$

calculemos el perímetro:

$$\begin{aligned}P &= a + b + c \\ P &= 66,90 + 85m + 100m \\ P &= 251,9m\end{aligned}$$

3. Se tiene un terreno de forma triangular con uno de sus lados inaccesibles, los lados que se pueden medir marcan 75m y 58m y el ángulo entre estos dos lados es de 120° . Calcular:
- La longitud del lado inaccesible del terreno
 - ¿Qué cantidad de cerca se necesitaría para cerrar el terreno?

Solución:



- a) Calculemos la longitud del lado inaccesible b:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B;$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$$

$$b = \sqrt{58^2 + 75^2 - 2(58)(75)\cos 120^\circ}$$

$$b = \sqrt{3364 + 5625 - 8700(-0,5)}$$

$$b = \sqrt{8989 + 4350}$$

$$b = 115,49m$$

- b) Calculemos la cantidad de cerca que es igual al perímetro.

$$cerca = a + b + c$$

$$cerca = 58m + 75m + 115,49m$$

$$cerca = 248,49m$$

3.7.3 LEY DE TANGENTES

La ley de tangentes relaciona entre la suma y la diferencia de dos lados de un triángulo con las tangentes de la mitad de la suma y diferencia de los ángulos. Esta ley dice: “La

suma de dos lados de un triángulo es a su diferencia como la tangente de la mitad de la suma de los ángulos opuestos a estos lados es a la tangente de la mitad de la diferencia de estos ángulos”.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}}$$

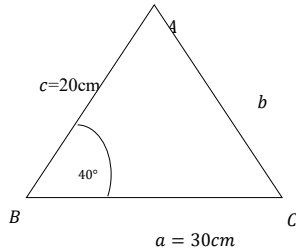
$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{C+A}{2}}{\tan \frac{C-A}{2}}$$

La demostración de esta ley como ejercicio de aplicación al estudiante.

Ejercicio:

1. En un triángulo $\triangle ABC$ determinar los valores de los ángulos y el lado faltante. $\angle B = 40^\circ; a = 30\text{cm}; c = 20\text{cm}$

Solución:



$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$$

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ - \sphericalangle B$$

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ - 40^\circ$$

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 140^\circ$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan \frac{C+A}{2}}{\tan \frac{C-A}{2}}$$

$$\frac{30cm+20cm}{30cm-20cm} = \frac{\tan 70^\circ}{\tan \frac{C-A}{2}}$$

$$5 = \frac{2,75}{\tan \frac{C-A}{2}}$$

$$\tan \frac{C-A}{2} = \frac{2,75}{5}$$

$$\tan \frac{C-A}{2} = 0,55$$

$$\frac{C-A}{2} = \tan^{-1} 0,55$$

$$\frac{C-A}{2} = 28,81^\circ$$

$$C-A = 57,62^\circ$$

Formamos un sistema de ecuaciones entre:

$$\angle C + \angle A = 140^\circ$$

$$\angle C - \angle A = 57,62^\circ$$

$$2\angle C = 197,62^\circ$$

$$\angle C = \frac{197,62^\circ}{2}$$

$$\angle C = 98,81^\circ$$

Calculemos el $\angle A$:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A = 180^\circ - 40^\circ - 98,81^\circ$$

$$\angle A = 41,19^\circ$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$b = \sqrt{30^2 + 20^2 - 2(30)(20)\cos 40^\circ}$$

$$b = \sqrt{900 + 400 - 924}$$

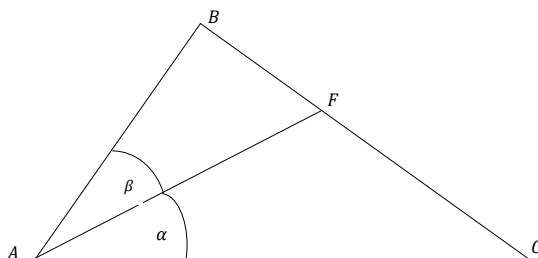
$$b = \sqrt{376}$$

$$b = 19,39\text{cm}$$

Para resolver triángulos rectángulos generalmente se utiliza la Ley de Senos y Ley de Cosenos y en muy pocas ocasiones la Ley de Tangentes.

3.8. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

A estas funciones también se las conoce con el nombre de funciones de ángulos compuestos ya que se forman por la suma o diferencia de dos o más ángulos así:



El $\angle A$ está formado por la suma del ángulo $\alpha + \text{ángulo } \beta$, de igual manera el $\angle \alpha$ está formado por el $\angle A - \angle \beta$.

$$\angle A = \angle \alpha + \angle \beta$$

$$\angle \alpha = \angle A - \angle \beta$$

SENO DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

Es la aplicación de la función seno a la suma de ángulos así:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \text{sen}\beta$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \text{sen}\beta$$

COSENO DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

TANGENTE DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

La demostración de estas expresiones se las deja como ejercicios de aplicación al estudiante.

Ejercicios:

1. Demostrar $\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$

Solución:

Aplicamos el seno de la suma de ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos 2\pi + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen} 2\pi$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha \cdot 1 + \cos\alpha \cdot 0$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$$

2. Demostrar: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Solución:

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos(0^\circ - \alpha) \\ \cos(0^\circ - \alpha) &= \cos 0^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 0^\circ \cdot \sin \alpha \\ \cos(0^\circ - \alpha) &= 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha \\ \cos(0^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha\end{aligned}$$

3. Demostrar que: $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$

Solución:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\ \sin 2\alpha &= \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

Observación: a esta identidad se la conoce como función trigonométrica del ángulo doble.

4. Demostrar que: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

Solución:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\ \cos 2\alpha &= \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

5. Hallar el valor de seno 75° en función de valores exactos:

Solución:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 75^{\circ} &= \operatorname{sen}(30^{\circ} + 45^{\circ}) \\ \operatorname{sen} 75^{\circ} &= \operatorname{sen} 30^{\circ} \cdot \cos 45^{\circ} + \cos 30^{\circ} \cdot \operatorname{sen} 45^{\circ} \\ \operatorname{sen} 75^{\circ} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} 75^{\circ} &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \operatorname{sen} 75^{\circ} &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

3.9. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Según Abarca, 2014 afirma que: “Una ecuación trigonométrica es una relación de igualdad que contiene expresiones trigonométricas. La igualdad se cumple para ciertos valores del ángulo”.

Estas soluciones se hallan aplicando procedimientos semejantes a los utilizados para demostrar identidades trigonométricas.

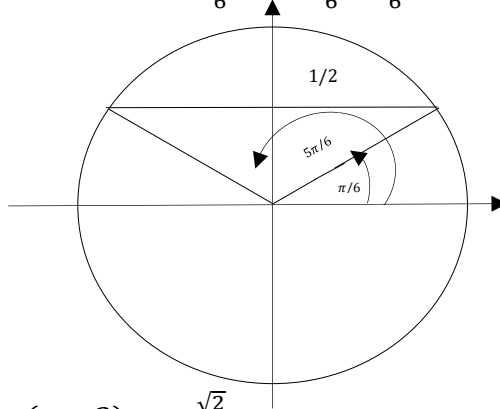
Para resolver ecuaciones trigonométricas se debe expresar la ecuación en términos de una sola función y de ser posible en términos del ángulo simple.

Ejercicios:

1. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Puesto que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, las soluciones positivas de esta ecuación son $\frac{\pi}{6}$ y $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$



$$2. \cos(x + 2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, se sigue que $x + 2 = \frac{3\pi}{4}$ o $x + 2 = \frac{5\pi}{4}$, de donde $x = \frac{3\pi}{4} - 2$ o $x = \frac{5\pi}{4} - 2$.

$$3. \operatorname{sen} x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Esta ecuación es equivalente a $2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ o también a $\operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

De donde $2x = \frac{\pi}{3}$ o $2x = \frac{2\pi}{3}$, es decir $x = \frac{\pi}{6}$ o $x = \frac{\pi}{3}$.

4. $\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x + 1 = 0$

Haciendo $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ se obtiene:

$$\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x - 2 = 0$$

Que es una ecuación de segundo grado en $\operatorname{sen} x$.

Más precisamente, haciendo $y = \operatorname{sen} x$ se tiene la ecuación.

$$y^2 + 2y - 2 = 0$$

Cuyas raíces son:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Luego $\operatorname{sen} x = -1 + \sqrt{3}$ o $\operatorname{sen} x = -1 - \sqrt{3}$.

Puesto que $|-1 - \sqrt{3}| > 1$, no existen valores de x tales que $\operatorname{sen} x = -1 - \sqrt{3}$.

De $\operatorname{sen} x = -1 + \sqrt{3}$ se obtienen los siguientes valores aproximados de x por medio de una tabla trigonométrica o una calculadora:

$$x = 0,74 \text{ rad} \quad \text{o} \quad x = 2,4 \text{ rad}$$

5. $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 4x$

Esta ecuación se puede expresar de la forma:

$$\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 4x = 0$$

O también: $2\operatorname{sen}\left(\frac{-x}{2}\right)\cos\frac{7x}{2} = 0$

O también: $\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{7x}{2} = 0$

Esta última ecuación es equivalente a:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0 \quad o \quad \cos\frac{7x}{2} = 0$$

De la primera se obtiene $\frac{x}{2} = 0 \quad o \quad \frac{x}{2} = \pi \quad o \quad \frac{x}{2} = 2\pi$,

Es decir $x = 0 \quad o \quad x = 2\pi \quad o \quad x = 4\pi$.

De la segunda:

$$\frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} \quad o \quad \frac{7x}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Es decir $x = \frac{\pi}{7} \quad o \quad x = \frac{3\pi}{7}$

3.10. EJERCICIOS PROPUESTOS: UNIDAD III

3.10.1. MEDIDAS DE ÁNGULOS

1. En el plano cartesiano graficar los ángulos, que generan los siguientes puntos:

$$(3,1), (-4,5), (2,0), (0,4), (\sqrt{3}, 1), \left(-\frac{1}{3}, \sqrt{3}\right).$$

2. Expresar las siguientes medidas de ángulos en grados sexagesimales (en forma decimal).

a) $22^\circ 45' 50''$

b) $81^\circ 59' 58''$

3. Expresar las siguientes medidas de ángulos en grados, minutos y segundos.

a) $(59,18^\circ)$

b) $(75,27^\circ)$

4. Exprese en radianes las siguientes medidas.

a) 9°

b) $40,7^\circ$

c) $150, 14', 53'$

Expresar los siguientes ángulos en grados.

5. $\frac{\pi}{3}$.

6. $\frac{\pi}{4}$.

7. $-\frac{\pi}{3}$.

8. $\frac{4\pi}{3}$.

9. $-\frac{7\pi}{2}$.

10. $-\frac{5\pi}{6}$.

11. $1,3$

12. $\frac{1}{2}$.

13. $-2,5$.

14. -3

15. $\frac{\pi+1}{6}$.

16. $\frac{3\pi+2}{5}$.

Expresar los siguientes ángulos en radianes:

17. $22\frac{1}{2}^\circ$

18. 60°

19. 135°

20. -720°

21. 990°

22. -120°

23. $-100,28^\circ$

24. $45,6^\circ$

25. $142^\circ 43, 2'$.

26. $-243,87^\circ$.

27. $125^\circ 23' 19''$.

28. $205^\circ 35,4'$

Dar los valores de las siguientes funciones:

29. $\text{sen} \frac{\pi}{3}$.

30. $\text{cos} \frac{\pi}{4}$.

31. $\tan \left(-\frac{5\pi}{6} \right)$

32. $\text{ctg} \left(-\frac{\pi}{2} \right)$

33. $\text{sec} \frac{5\pi}{4}$.

34. $\text{sen} \left(-\frac{11\pi}{2} \right)$.

Hallar los valores de θ comprendidos entre 0 y 2π .

35. $\text{sen} \theta = \frac{1}{2}$.

36. $\text{cos} \theta = -\frac{1}{2}$.

37. $\tan\theta = -1$ 38. $\csc\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
39. $\sec\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 40. $\tan\theta = \sqrt{3}$.
41. $\cot\theta + \sqrt{3} = 0$ 42. $\sqrt{3}\sec\theta + 2 = 0$
43. Expresar en grados y en radianes:
- Siete décimos de cuatro ángulos rectos.
 - Cinco cuartos de dos ángulos rectos.
 - Dos tercios de un ángulo recto.
44. Hallar en radianes la medida del ángulo correspondiente a un arco cuya longitud es de 37,5 m en un círculo de 25 m de radio.
45. Hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de 4,5 radianes en un círculo cuyo radio es 25 m.
46. Hallar la longitud del radio de un círculo en el que un arco cuya longitud es de 9,6 m corresponde a un ángulo central de 1,2 radianes.
47. Hallar la longitud de un arco de 80° en un círculo de 4 metros de radio.
48. Hallar en grados la medida de un ángulo central que en un círculo de radio 10 m le corresponde un arco de 5π metros.
49. Hallar en radianes la medida de un ángulo central que en un círculo de radio $3\frac{2}{11}$ cm le corresponde un arco de 24 centímetros.
50. ¿Cuánto tiempo tarde la manecilla de los minutos de un reloj en girar un ángulo de $-1\frac{2}{3}$ radianes?

51. ¿Qué ángulo, en medida circular, describe la manecilla de las horas de un reloj en 39 minutos y $22\frac{1}{2}$ segundos?
52. Un volante da 10 revoluciones por segundo ¿Cuánto tiempo tarde en recorrer 2 radianes, si se toma $\pi = \frac{22}{7}$?

Transformar de grados y minutos a grados con decimales.

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| 53. $28^{\circ}17'$ | 54. $32^{\circ}45'$ |
| 55. $176^{\circ}36'$ | 56. $415^{\circ}38'40,5''$ |
| 57. $1500^{\circ}40'$ | 58. $-(312^{\circ}25')$ |
| 59. $-(500^{\circ}05')$ | 60. $415^{\circ}59'20''$ |
| 61. $350^{\circ}30'$ | 62. $450^{\circ}15'30,30''$ |

Transformar de grados con decimales a grados y minutos.

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 63. $-20,58$ | 64. $-1245,456^{\circ}$ |
| 65. $480,56^{\circ}$ | 66. $215,387^{\circ}$ |
| 67. $215,67^{\circ}$ | 68. $417,57^{\circ}$ |
| 69. $216,57^{\circ}$ | 70. $413,45^{\circ}$ |
| 71. $-1247,98^{\circ}$ | 72. $567,38^{\circ}$ |

Transformar de radianes a grados, minutos y segundos.

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| 73. $-\frac{5}{3}\pi \text{ rad}$ | 74. $-\frac{5}{3} \text{ rad}$ |
| 75. $14\pi \text{ rad}$ | 76. 14 rad |
| 77. $-1,8 \text{ rad}$ | 78. $300\pi \text{ rad}$ |
| 79. $2,5 \text{ rad}$ | 80. $0,12 \text{ rad}$ |
| 81. $-0,58 \text{ rad}$ | 82. 8 rad |

3.10.2 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

83. Hallar las funciones trigonométricas del ángulo A, sabiendo que: $a=8$, $b=15$.
84. Hallar las funciones del ángulo B, sabiendo que $b=5$, $c=13$.
85. Hallar las funciones del ángulo B, sabiendo que $a=0,6$ $b=0,8$.
86. Hallar las funciones del ángulo A, sabiendo que $b=2$, $c=\sqrt{11}$.
87. Hallar las funciones del ángulo B, sabiendo que $a=5$, $c=7$.
88. Hallar las funciones del ángulo A, sabiendo que $a=p$, $b=q$.
89. Hallar las funciones del ángulo A, sabiendo que $a=\sqrt{m^2 + mn}$, $c = m + n$
90. Dados $\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$ $c=200,5$; hallar a
91. Dados $\cos A = 0,44$ $c=30,5$; hallar b.
92. Dados $\tan A = 1 \frac{1}{3}$, $b = 2 \frac{7}{11}$; hallar c.
93. Dados $\tan B = k$, $a = r$; hallar c.
94. Si $b=2^a$, hállese las funciones de A. ¿Por qué no aparecen en ellas ni a ni b?
95. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a tres veces la longitud de uno de sus catetos. Hallar las funciones del ángulo opuesto a este cateto. ¿Por qué en las soluciones no entra la

longitud de este cateto?

96. Si un cateto de un triángulo rectángulo es 16 y la cotangente del ángulo opuesto es $\frac{3}{4}$, calcular la longitud del otro cateto.
97. Dados $A=30^\circ$, $a=25$; hallar c , B y b .
98. Dados $B=30^\circ$, $c=48$; calcular b , A y a .
99. Dados $B=45^\circ$, $b=20$; hallar c , A y a .
100. ¿Cuáles son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, si un cateto es $\sqrt{3}$ veces la longitud del otro?

Resolver los siguientes triángulos rectángulos ($C=90^\circ$), dados:

101. $A=20^\circ$, $c=80$.
102. $B=51^\circ$, $c=250$.
103. $A=36^\circ$, $c=1$.
104. $A=25^\circ$, $a=30$.
105. $A=10^\circ$, $b=30$.
106. $B=55^\circ$, $b=10$.
107. $A=75^\circ$, $a=80$.
108. $a=2$, $c=2,8284$.
109. $c=43$, $a=38,31$
110. $a=36,4$ $b=100$.
111. $a=23,32$, $b=50$.
112. $b=9,696$, $c=20$.

113. $a=30,21$, $c=33,33$.

114. $a=13,40$ $b=50$.

Resolver los siguientes triángulos rectángulos que tienen los siguientes elementos como datos.

115. La longitud del hilo que sostiene una cometa es de 250 metros y el ángulo de elevación de la cometa es de 40° . Hallar su altura suponiendo que el hilo que la sostiene se mantiene recto.

116. Desde un punto situado a 200 metros, medidos sobre una horizontal del pie de una torre, se observa que el ángulo de elevación de la cúspide es de 60° . Calcular la altura de la torre.

117. Un poste de 10 metros de longitud proyecta una sombra de 8,391 metros. Hallar el ángulo de elevación del sol.

118. Desde la punta de una roca que se eleva verticalmente 24 metros fuera del agua se observa que el ángulo de depresión de un bote es de 30° ; hallar la distancia del bote al pie de la roca.

119. Desde la parte superior de una torre de 120 m de altura se observa que el ángulo de depresión de un objeto que está a nivel con la base de la torre es de $27^\circ 43'$. ¿Cuáles son las distancias del objeto a la punta y a la base de la torre?

120. ¿Cuál es el ángulo de elevación de un plano inclinado si se eleva 1 m en una distancia de 40 m?

121. Con el fin de hallar el ancho de un río se ha medido una base AC de 350 m a lo largo de una

de sus orillas. Sobre la orilla opuesta se toma un punto B tal que CB sea perpendicular a AC. También se ha medido el ángulo CAB y resulta ser $52^{\circ}12'$. Hállese el ancho del río.

122. Desde la parte superior de una torre se ha observado que el ángulo de depresión del extremo de una línea base horizontal de 300 m de longitud, medidos a partir del pie de la torre, es de $21^{\circ}16'$. Hallar la altura de la torre.
123. ¿Qué ángulo forma la diagonal de un cubo con la diagonal de una cara del mismo cubo trazada desde el mismo vértice?
124. La longitud del lado de un octágono regular es 12 cm. Hallar los radios de los círculos inscrito y circunscrito.

3.10.3.RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Resolver los siguientes triángulos:

125. Dados: $a=40$, $A=60^{\circ}$, $B=45^{\circ}$
126. Dados: $b=7$, $A=30^{\circ}$, $C=105^{\circ}$.
127. Dados: $c=60$, $A=50^{\circ}$, $B=75^{\circ}$.
128. Dados: $a=20$, $B=45^{\circ}$, $C=60^{\circ}$
129. Dados: $a=550$, $A=10^{\circ}12'$, $B=46^{\circ}36'$
130. Dados: $B=100^{\circ}10'$, $C=45^{\circ}40'$, $c=3060$.

Hallar el número de triángulos que se pueden construirse con los siguientes datos:

131. a) $a=80$, $b=100$, $A=30^\circ$
 b) $a=50$, $b=100$, $A=30^\circ$
 c) $a=40$, $b=100$, $A=30$.
 d) $A=13$, $b=11$, $A=69^\circ$.
132. a) $a=70$, $b=75$, $A=60^\circ$.
 b) $A=134$, $b=84$, $B=60^\circ$.
 c) $A=200$, $b=100$, $A=30^\circ$.
 d) $B=300$, $C=45^\circ$, $c=250$.

Resolver los siguientes triángulos:

133. Datos: $a=18$, $b=20$, $A=55^\circ 24'$
 134. Datos: $a=3\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{3}$, $A=60^\circ$
 135. Datos: $b=19$, $c=18$, $C=15^\circ 49'$
 136. Datos: $a=119$, $b=97$, $A=50^\circ$
 137. Datos $a=2$, $b=3$, $c=45^\circ$; hallar c .
 138. Datos $b=8$, $c=5$, $A=60^\circ$; hallar a , $\cos B$ y $\cos C$.
 139. Datos $a=4$, $c=5$, $B=120^\circ$; hallar b .
 140. Datos $a=24$, $b=16$, $c=44^\circ$; hallar c .
 141. Datos $b=10$, $c=11$, $A=133^\circ$; hallar a .
 142. Datos $a=21$, $b=24$, $c=27$; resolver el triángulo.
 143. Datos $a=2$, $b=3$, $c=4$; hallar el coseno del mayor ángulo.
 144. Hallar el mayor ángulo de un triángulo de lados 4, 7 y 10 cm.
 145. Si los dos lados de un triángulo son 10 y 11 y el ángulo formado por ellos es de 50° , calcular el tercer lado.
 146. Los lados de un triángulo son 3, 8 y 9. Hallar la

altura del triángulo correspondiente al vértice del ángulo más pequeño.

Resolver los triángulos oblicuángulos que tienen los siguientes elementos como datos.

- 147. $A=795$, $A=79^{\circ}59'$, $B=44^{\circ}41'$
- 148. $a=400$, $A=54^{\circ}29'$, $C=60^{\circ}$.
- 149. $B=0,8037$, $B=52^{\circ}20'$, $C=101^{\circ}40'$.
- 150. $c=161$, $A=35^{\circ}15'$, $C=123^{\circ}39'$.
- 151. $b=29,01$, $A=87^{\circ}40'$, $C=33^{\circ}15'$.
- 152. $a=5,421$, $B=42^{\circ}17'$, $C=82^{\circ}28'$.
- 153. $c=2071$, $A=31^{\circ}9'$, $B=115^{\circ}24'$.
- 154. $b=47,21$, $A=22^{\circ}16'$, $B=81^{\circ}42'$.
- 155. $c=370,2$, $B=23^{\circ}48'$, $C=47^{\circ}19'$.
- 156. $B=0,2828$, $B=108^{\circ}25'$, $C=58^{\circ}27'$.
- 157. $a=500$, $A=10,2^{\circ}$, $B=46,6^{\circ}$.
- 158. $a=45$, $A=36,8^{\circ}$, $C=62^{\circ}$.
- 159. $b=5685$, $B=48,63^{\circ}$, $C=83,26^{\circ}$
- 160. $b=0,6244$, $B=34,22^{\circ}$, $C=80,61^{\circ}$.
- 161. $a=76,08$, $B=126^{\circ}$, $C=12,44^{\circ}$
- 162. $b=129,38$, $A=19,42^{\circ}$, $C=64^{\circ}$.
- 163. $b=8000$, $A=24,5^{\circ}$, $B=86,495^{\circ}$
- 164. $c=9500$, $A=2,086^{\circ}$, $B=112^{\circ}$
- 165. $b=2,876$, $B=107,52^{\circ}$, $C=62,3^{\circ}$
- 166. $c=10,345$, $A=20,85^{\circ}$, $B=111,11^{\circ}$

3.10.4.IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Demuéstranse las siguientes identidades:

167. $\tan \theta + \cot \theta = \sec \theta \csc \theta$
168. $1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$
169. $\operatorname{sen} \theta \cos \theta \sec \theta \csc \theta = 1$
170. $\frac{1}{1+\operatorname{sen} \theta} + \frac{1}{1-\operatorname{sen} \theta} = 2 \sec^2 \theta$
171. $\cos \theta + \tan \theta \sec \theta = \sec \theta$
172. $\cos^4 \theta - \operatorname{sen}^4 \theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$
173. $\frac{\tan \theta - \cot \theta}{\tan \theta - \cot \theta} = 2 \operatorname{sen}^2 \theta - 1$
174. $\frac{\operatorname{sen} \theta}{1+\cos \theta} + \frac{1+\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = 2 \csc \theta$
175. $\frac{1-\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1+\cos \theta}$
176. $\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta}$
177. $\cot \theta + \tan \theta = \cot \theta \sec^2 \theta$
178. $\frac{1+\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} = \csc^2 \theta$
179. $(\csc \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}$
180. $(\sec \theta - \tan \theta)^2 = \frac{1-\operatorname{sen} \theta}{1+\operatorname{sen} \theta}$
181. $(\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)^2 + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 1$
182. $\frac{\cot^2 \theta - 1}{1+\cot^2 \theta} = 2 \cos^2 \theta - 1$
183. $\frac{1+\csc \theta}{\csc \theta - 1} = \frac{1+\operatorname{sen} \theta}{1-\operatorname{sen} \theta}$
184. $\frac{\tan \theta}{1-\cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1-\tan \theta} = 1 + \tan \theta + \cot \theta$
185. $\frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta$
186. $\frac{2 \operatorname{sen}^2 \theta - 1}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} = \tan \theta - \cot \theta$
187. $\sec \theta \csc \theta - 2 \cos \theta \csc \theta = \tan - \cot \theta$

188. $\frac{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta} = \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$
189. $\frac{\operatorname{sen} \theta}{\csc \theta - \cot \theta} = 1 + \cos \theta$
190. $\frac{(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)^2}{\cos^4 \theta - \operatorname{sen}^4 \theta} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \theta$
191. $\frac{\sec^2 \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} = \frac{\sec^2 \theta - \sec \theta \tan \theta}{\cos^2 \theta}$
192. $1 + \cot \theta = \frac{(1 - \cot^2 \theta) \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta}$
193. $\frac{\sec \theta + \tan \theta}{\cos \theta - \tan \theta - \sec \theta}$
194. $\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cot \theta} = \sec \theta + \csc \theta - \frac{\cos \theta}{\tan \theta}$
195. $\frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta + \cos \theta \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta} = \frac{\tan \theta + \tan \theta}{1 - \tan \theta \tan \theta}$
196. $\frac{1}{(\cos \theta - \cot \theta)^2} = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$
197. $\frac{1}{1 - \csc \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \csc \theta} = -2\operatorname{sen} \theta \tan \theta$
198. $\frac{(\operatorname{sen} \theta - \tan \theta)^2}{\sec \theta - \tan \theta} = 2 \sec \theta$
199. $\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$
200. $\operatorname{sen} \theta (1 - \operatorname{sen} \theta \cos \theta) + \cos \theta (1 - \operatorname{sen} \theta \cos \theta) = \operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta$
201. $\operatorname{sen}^3 \theta - \cos^3 \theta = \operatorname{sen} \theta (1 + \operatorname{sen} \theta \cos \theta) - \cos \theta (1 + \operatorname{sen} \theta \cos \theta)$

Verificar las siguientes identidades:

202. $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x + 1 = 2\cos^2 x$
203. $\tan A + 2\cot A = \frac{1 + \cos^2 A}{\cos A \operatorname{sen} A}$
204. $\sec^4 A - \sec^2 A = \tan^4 A + \tan^2 A$
205. $\frac{\tan A + \cos A}{\operatorname{Sen} A} = \sec A + \cot A$

206. $\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \tan A + \sec A$
207. $\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) + \csc^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{2} =$
208. $\frac{\operatorname{sen} x + \tan x}{1 + \cos x} = \tan x$
209. $(1 + \operatorname{sen} \beta)(\sec \beta - \tan \beta) = \cos \beta$
210. $\operatorname{sen} \alpha (1 - \operatorname{sen} \alpha) \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}\right) = \cos^2 \alpha$
211. $\frac{\operatorname{sen}^2 \beta - \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} = \tan^2 x - 1$
212. $\frac{\left(1 + \frac{\cos \alpha}{\cot \alpha}\right) \sec^2 \alpha}{1 + \left(\frac{1}{\cot \alpha} + \sec \alpha\right)^2} = \frac{1}{2}$
213. $\frac{1 + \operatorname{sen} \beta - \cos^2 \beta}{1 + \operatorname{sen} \beta} = \operatorname{sen} \beta$
214. $4r^2 \operatorname{sen}^2 \beta \cos^2 \beta + r^2 (\cos^4 \beta - 2\cos^2 \beta + \operatorname{sen}^4 \beta) = r^2$
215. $\frac{\operatorname{sen} \alpha + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}} = \operatorname{sen} \alpha \tan \alpha$
216. $\operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta \cos \theta$
217. $(1 - \cos \alpha)(1 + \sec \alpha) \cot \alpha = \operatorname{sen} \alpha$
218. $\frac{\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta} = 1 - \operatorname{sen} \theta \cos \theta$
219. $\cot \beta + \frac{\operatorname{sen} \beta}{1 + \cos \beta} = \csc \beta$
220. $\tan \alpha - \csc \alpha \sec \alpha (1 - 2\cos^2 \alpha) = \cot \alpha$
221. $\frac{\cos \beta}{1 - \tan \beta} + \frac{\operatorname{sen} \beta}{1 - \cot \beta} = \operatorname{sen} \beta + \cos \beta$
222. $\frac{1}{1 - \operatorname{sen} \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{sen} \alpha} = 2\sec^2 \alpha$
223. $\tan B \operatorname{sen} B + \cos B = \sec B$
224. $\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 A \tan^2 A = \tan^2 A$

$$\begin{aligned}
225. & (x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha)^2 + (x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha)^2 = x^2 + y^2 \\
226. & \frac{\operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta} = \frac{\tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} \\
227. & \tan \alpha - \csc \alpha \sec(1 - 2 \cos^2 \alpha) = \cot \alpha \\
228. & \tan \beta + \cot \beta = \sec \beta \csc \beta \\
229. & \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 2 \csc \alpha \\
230. & \sec \beta \csc \beta (\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta) = \cot \beta - \tan \beta \\
231. & (\operatorname{sen} w + \cos w)^2 + (\operatorname{sen} w - \cos w)^2 = 2 \\
232. & \operatorname{sen}^2 B + \tan^2 B = \sec^2 B - \cos^2 B \\
233. & \cot \alpha + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} = \csc \alpha \\
234. & \cos A \tan A + \operatorname{sen} A \cot A = \operatorname{sen} A + \cos A \\
235. & \frac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{2 \operatorname{sen}^2 x - 1} = \frac{\sec x - \operatorname{sen} x}{\tan x - 1} \\
236. & \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha}} = \sec \alpha - \tan \alpha \\
237. & \tan x + \cot x = \csc x \sec x \\
238. & \frac{1 - \sec^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta} = \cos^4 \beta \\
239. & \tan x \operatorname{sen} x + \cos x = \sec x \\
240. & \tan \beta + \frac{1}{\cos^3 \beta} - \frac{1}{\sec \beta - \tan \beta} = \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\cos^3 \beta} \\
241. & \frac{\sec A - \cos A}{\csc A - \operatorname{sen} A} = \tan^3 A \\
242. & \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \frac{\sec x + \csc x}{\sec x - \csc x} \\
243. & \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \\
244. & \frac{1 + \cos B}{\operatorname{sen} B} + \frac{\operatorname{sen} B}{1 + \cos B} = 2 \csc B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
245. \frac{\text{sen}y + \text{tan}y}{1 + \text{sec}y} &= \text{sen}y \\
246. \frac{\text{sen}A}{1 - \cos A} &= \csc A + \cot A \\
247. \frac{2\text{sen}^2x - 1}{\cos x} + \frac{\cos x(2\text{sen}x + 1)}{1 + \text{sen}x} &= \tan x \\
248. \sec x - \frac{\cos x}{1 + \text{sen}x} &= \tan x \\
249. \tan x - \csc x \sec x(1 - 2\cos^2x) &= \cot x \\
250. (\text{sen}x + \csc x)^2 + (\cos x + \sec x)^2 &= \tan^2x + \cot^2x + 7
\end{aligned}$$

3.10.5. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Resolver las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}
251. \text{sen}^2x &= 1/4 & 252. \csc^2x &= 2 \\
253. \tan^2x - 3 &= 0 & 254. \sec^2x - 4 &= 0 \\
255. \tan 2x &= 1 & 256. 2\cos 2x + \sqrt{3} &= 0 \\
257. \text{sen}^2 2x &= 1 & 258. 4\cos^2 2x - 1 &= 0 \\
259. \text{ctg}^2 \frac{x}{2} &= 3 & 260. \sec^2 \frac{x}{2} &= 2
\end{aligned}$$

Hallar, en radianes, todos los ángulos comprendidos entre 0 y 2π que satisfacen a las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}
261. (\tan x + 1)(\sqrt{3}\text{ctg}x - 1) &= 0 \\
262. (2\cos x + 1)(\text{sen}x - 1) &= 0 \\
263. (4\cos^2\theta - 3)(\csc\theta + 2) &= 0 \\
264. 2\text{ctg}\theta \text{sen}\theta + \text{ctg}\theta &= 0 \\
265. \tan^2x - (1 + \sqrt{3}\tan x + \sqrt{3}) &= 0
\end{aligned}$$

$$266. 2\operatorname{sen}^2 x + (2 - \sqrt{3})\operatorname{sen} x - \sqrt{3} = 0$$

Resolver las siguientes ecuaciones para valores del ángulo comprendidos entre 0° y 360° .

$$267. 2\operatorname{sen}^2 x + 3\cos = 0$$

$$268. \cos^2 a = \operatorname{sen}^2 a = 1/2$$

$$269. 2\sqrt{3}\cos^2 a = \operatorname{sen} a$$

$$270. \operatorname{sen}^2 y - 2\cos y + \frac{1}{4} = 0$$

$$271. 4\sec^2 y - 7\tan^2 y = 3$$

$$272. \tan B + \operatorname{ctg} B = 2$$

$$273. \operatorname{sen} x + \cos x = 0$$

$$274. \operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

$$275. 2\tan^2 x + 3\sec x = 0$$

$$276. \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x + 2 = 0$$

$$277. \operatorname{ctg}^2 \theta - 3\csc \theta + 3 = 0$$

$$278. \tan^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 2 = 0$$

$$279. \csc x \operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}$$

$$280. \operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{4} = 0$$

$$281. \cos 2x + \cos x = -1$$

$$282. 2\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} 2y$$

$$283. \cos 2x = \cos x$$

$$284. \cos 2x = \cos^2 x$$

$$285. \tan(x + 45^\circ) = 1 + \operatorname{sen} 2x$$

$$286. \operatorname{sen}(60^\circ - x) - \operatorname{sen}(60^\circ + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$287. \operatorname{sen}(30^\circ + x) - \cos(60^\circ + x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$288. \tan(45^\circ - x) + \operatorname{ctg}(45^\circ - x) = 4$$

289. $\text{sen}x \text{sen} \frac{x}{2} = 1 - \cos x$
290. $\text{sen} \frac{x}{2} + \cos x = 1$
291. $\text{csc}y + \text{ctg}y = \sqrt{3}$
292. $3(\sec^2 a + \text{ctg}^2 a) = 13$
293. $\text{sen}x = 3\cos x$
294. $2\cos x = \cos 2x$
295. $\tan x = \tan 2x$
296. $3\cos^2 x + 5\text{sen}x - 1 = 0$
297. $3\text{sen}x \tan x - 5\sec x + 7 = 0$
298. $\csc^2 x (1 + \text{sen}x \text{ctg}x) = 2$
299. $\tan x + \sec^2 x - 3 = 0$
300. $\text{sen}x + \cos 2x = 4\text{sen}^2 x - 1$
301. $\text{sen}(2x - 180^\circ) = \cos x$
302. $\sec(x + 120^\circ) + \sec(x - 120^\circ) = 2\cos x$
303. $\cos^2 x + 2\text{sen}x = 0$
304. $\sec^2 2x - \text{sen}2x - 2 = 0$
305. $\text{sen}^2 2x - \text{sen}2x - 2 = 0$
306. $\tan^2 \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} - 2 = 0$
307. $4\text{sen}x + 3\cos x = 3$
308. $5\text{sen}x = 4\cos x + 4$
309. $\text{sen } x + \text{sen } 2x + \text{sen } 3x = 0$
310. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$

3.10.6.SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

311. Hallar el valor de $\cos 75^\circ$, usando las funciones de 45° y 30° .
312. Hallar el valor de $\operatorname{sen} 105^\circ$, usando las funciones de 60° y 45° .
313. Si $\tan x = 3/4$ y $\tan y = 7/24$, hallar $\operatorname{sen}(x + y)$ y $\cos(x + y)$ cuando x e y son ángulos agudos.
314. Sabiendo que α y β terminan en el segundo y cuarto cuadrantes, respectivamente, y que $\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta = \frac{3}{5}$ hallar $\cos(\alpha + \beta)$.
315. Usando la tabla de valores naturales de las funciones trigonométricas, hallar: a) $\operatorname{sen} 31^\circ$ con las funciones de 20° y 11° ; b) la diferencia entre $\operatorname{sen}(20^\circ + 11^\circ)$ y $\operatorname{sen} 20^\circ + \operatorname{sen} 11^\circ$.
316. Hallar $\cos(210^\circ + A)$ si $\sec A = -\sqrt{3}$ y A termina en el segundo cuadrante.
317. Demostrar que $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$ y $\cos 90^\circ = 0$, usando las funciones de 60° y 30° .

318. Demostrar que $\text{sen}180^\circ = 0$ y $\cos 180^\circ = -1$,
usando las funciones de 120° y 60° .

Demostrar que:

$$319. \text{sen}(45^\circ + x) = \frac{\cos x + \text{sen} x}{\sqrt{2}}$$

$$320. \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{\cos \alpha - \sqrt{3} \text{sen} \alpha}{2}$$

$$321. \text{sen}(y + 135^\circ) = \frac{\cos y - \text{sen} y}{\sqrt{2}}$$

$$322. \cos(210^\circ + x) = \frac{1}{2}(\text{sen} x - \sqrt{3} \cos x)$$

$$323. \text{sen}(x + y) \cos y - \cos(x + y) \text{sen} y = \text{sen} x$$

$$324. \text{sen}(x + 60^\circ) - \cos(x + 30^\circ) = \text{sen} x$$

325. Hallar el $\text{sen}15^\circ$, usando las funciones de 45° y 30° .

326. Hallar $\text{sen}(x - y)$ y $\cos(x - y)$, sabiendo que
 $\text{sen} x = 1/4$ y $\text{sen} y = 1/3$, siendo x e y ángulos
agudos.

Demostrar que:

$$327. \text{sen}(45^\circ - x) = \frac{\cos x - \text{sen} x}{\sqrt{2}}$$

$$328. \cos(60^\circ - A) = \frac{\cos A + \sqrt{3} \text{sen} A}{2}$$

$$329. \cos(x - 315^\circ) = \frac{\cos x - \text{sen} x}{\sqrt{2}}$$

$$330. \text{sen}(\beta - 120^\circ) = \frac{\text{sen} \beta + \sqrt{3} \cos \beta}{2}$$

$$331. \text{sen}(60^\circ + x) - \text{sen} x = \text{sen}(60^\circ - x)$$

$$332. \cos(30^\circ + y) - \cos(30^\circ - y) = -\text{sen} y$$

$$333. \cos(x + 45^\circ) + \cos(x - 45^\circ) = \sqrt{2} \cos x$$

$$334. \cos(Q + 45^\circ) + \text{sen}(Q - 45^\circ) = 0$$

335. Hallar $\tan 75^\circ$ conocidas las funciones de 45° y 30°

336. Hallar $ctg105^\circ$ conocidas las funciones de 60° y 45°

337. Hallar $\tan(x + y)$ y $\tan(x - y)$, teniendo datos

$$\tan x = \frac{1}{2} \text{ y } \tan y = 1/4.$$

338. Si $\tan(x + y) = \sqrt{3}$ y $\tan x = 1$, calcular $\tan y$.

Demostrar que:

$$339. \tan(45^\circ + x) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

$$340. ctg(y - 45^\circ) = \frac{1 + ctg y}{1 - ctg y}$$

$$341. \tan(1 - 60^\circ) = \frac{\tan 1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \tan A}$$

$$342. ctg(B + 210^\circ) = \frac{\sqrt{3} ctg B - 1}{ctg B + \sqrt{3}}$$

$$343. \frac{\sen(x+y)}{\sen(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$$

$$344. \tan x + \tan y = \frac{\sen(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$345. \tan(x + 45^\circ) + ctg(x - 45^\circ) = 0$$

$$346. ctg A - ctg B = \frac{\sen(B-A)}{\sen A \sen B}$$

$$347. 1 - \tan x \tan y = \frac{\cos(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$348. ctg P \ ctg Q - 1 = \frac{\cos(P+Q)}{\sen P \ sen Q}$$

UNIDAD IV

4. RESPUESTAS A ALGUNOS EJERCICIOS PROPUESTOS

4.1. UNIDAD I: SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

1. 29

3. -33

5. 3

7. -16

9. 34

11. $\frac{118}{33}$

13. $\frac{37569}{4995}$

15. $\frac{30}{11}$

17. $\frac{5449}{99}$

19. $\frac{421}{11}$

21. $7,42 \times 10^3$
23. $3,82 \times 10^6$
25. $9,88 \times 10^5$
27. $9,88 \times 10^{-3}$
29. $4,85 \times 10^{-2}$
31. $(-2 + \infty)$
33. $(-\infty, \frac{3}{4}]$
35. $[4, 8]$
37. $(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}]$
39. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$
41. $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, 3)$
43. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
45. $(-\infty, -5) \cup (3 + \infty)$
47. $[-1, \frac{1}{2}]$
49. $(-3, \frac{3}{4})$
51. $(\frac{3}{2}, \frac{31}{14}] \cup (\frac{7}{3}, +\infty)$
53. $(-11, 3)$
55. $[\frac{2}{3}, 2]$
57. $(-\infty, -2) \cup (12, +\infty)$
59. $[-\frac{1}{2}, 4]$
61. $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$
63. $(1, +\infty)$
65. $[-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}]$

67. $\left(-\infty, \frac{10}{9}\right) \cup (2, +\infty)$
69. (a) $(2, +\infty)$; (b) $(-4, 4]$
71. (a) $(2, 12)$; (b) $(-\infty, -4] \cup (4, +\infty)$
73. (a) $(2, 12)$; (b) $(-\infty, -4] \cup (4, +\infty)$
75. (a) $(-4, 0]$; (b) $(-\infty, 7]$
77. (a) $\{x | 2 < x < 7\}$; (b) $\{x | -3 \leq x \leq 6\}$; (c) $\{x | -5 < x \leq 4\}$; (d) $\{x | -10 \leq x < -2\}$
79. (a) $\{x | x \geq 3\}$; (b) $\{x | x < 0\}$; (c) $\{x | x > -4\}$; (d) $\{x | x < 0\} \cup \{x | x \geq 0\}$
81. $[5, +\infty)$
83. $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$
85. $(-5, +\infty)$
87. $\left(-\infty, \frac{17}{2}\right]$
89. $\left(-\infty, -\frac{17}{3}\right)$
91. $(-8, +\infty)$
93. $(-\infty, 4]$
95. $(-\infty, 5)$
97. $[4, 8)$
99. $(-4, 1)$
101. $(1, 4)$
103. $[-6, -4]$
105. $\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right]$
107. $\left[-3, \frac{21}{5}\right)$
109. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
111. $(-3, 4)$

113. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2} + \infty\right)$
115. $[1, 3]$
117. $[-4, 1]$
119. $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$
121. $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$
123. Conjunto R de los números reales.
125. $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right) \cup (2, +\infty)$
127. $(-3, 1) \cup (4, +\infty)$
129. $(-\infty, -4] \cup [0, 4]$
131. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$
133. Conjunto R de los números reales.
135. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
137. $(4, 24)$
139. $\left(-\infty, -\frac{23}{0}\right) \cup \left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$
141. $(-\infty, -4) \cup [-2, +\infty)$
143. $(-\infty, -2) \cup (1, 3)$
145. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$
147. $(-4, -3) \cup \left(2, \frac{8}{3}\right]$
149. $[-5, 5]$
151. $(-\infty, -6) \cup (8, +\infty)$
153. $[2, 8]$
155. $(-1, 8)$
157. $(-\infty, -1) \cup (8, +\infty)$

159. $\left(-\infty, -\frac{16}{3}\right) \left(-\frac{8}{3}, +\infty\right)$
 161. $\left[1, \frac{9}{5}\right]$
 163. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$
 165. $(-3, -1) \cup (1, 3)$
 167. $[-1, 2] \cup [3, 6]$
 169. $(-\infty, -5] \cup [-3, 3] \cup [5, +\infty)$
 171. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
 173. $(-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$

4.2. UNIDAD II: ALGEBRA

1. (a) Trinomio, 2; (b) Binomio, 1; (c) Monomio, 6; (d) Trinomio, 4.
3. (a) $10x^2 - 7x$; (b) $-30y^3 + 20y^2 - 5y + 15$
5. (a) $-17t^2 + 11st - 4s^2$; (b) $-5x + 77$
7. (a) $7x^3 + x^2 + 5x - 11$; (b) $x^3 - 15x^2 - x + 3$
9. (a) $14y^4 - 5y^3 - 4y^2 + 3y + 5$; (b) $-2y^4 + 5y^3 + 3y - 7$
11. (a) $-12x^4 + 6x^3 - 21x^2$; (b) $a^5b^2 + \frac{5}{2}a^4b^3 - \frac{1}{2}a^3b^4$
13. (a) $6x^2yz^3 - 12xy^2z^3 - 2x^2y^2z^2 - 2xyz^2$; (b) $3x^{3n+1} - 12x^{3n} + 15x^{2n}$
15. (a) $2x^2 - 11x - 21$; (b) $10s^2 + 8st - 24t^2$
17. (a) $-36a^2 - 88ab + 60b^2$; (b) $32y^3 +$

$$16y^2 + 2y$$

$$19. 9x^3 + 12x^2y + 7xy^2 + 20y^3$$

$$21. 2x^4 - 8x^3 - 17x^2 + 38x - 15$$

$$23. -15b^4 + 14b^3 + 26b^2 - 19b + 14$$

$$25. 12x^{4n} - 11x^{2n}y^n - 5y^{2n}$$

$$27. (a) x^2 + 9x + 20; (b) 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$$29. (a) w^2 - 36; (b) 12r^2 - 5rs - 2s^2$$

$$31. (a) t^4 + 4t^2 - 45; (b) 16x^4 - 24x^2y^2 + 9y^4$$

$$33. (a) 121u^2 - 64v^2; (b) 35a^4 + 11a^2b^2 - 6b^4$$

$$35. (a) 2 - 7x^2; (b) -7v^2 + 4uv$$

$$37. (a) -3abc^2 + 4b^2 - 2a^3bc; (b) 8t^{2n} - 32t^{4n}$$

$$39. 2x - 1$$

$$41. 2a + 3$$

$$43. -3x + 5 + \frac{7}{x+1}$$

$$45. 5b^2 - 3b + 6$$

$$47. y - 3 + \frac{5y-1}{y^2+3y-2}$$

$$49. x^2 + 3x + 9$$

$$51. 2x - 4y + \frac{9y^2}{2x+3y}$$

$$53. a^5 + a^4b + a^2b^3 + ab^4 + b^5$$

$$55. \text{Para ningún valor}$$

$$57. a) 3x - (-6x + 7) - (4x - 7) - (8x - 5)$$

$$b) x^5 - [-7x^4 - (3x^3 - 7) - (7x^2 + 5)] - 5x$$

$$c) 4x^3 - [-3x^4 - (2x^2 + 5x - 6)] - 5x^5$$

$$59. -6x^2 + 2y^2 + 17x - 7y$$

$$61. 2a + b$$

$$63. -6x^6 + 19x^5 - 3x^4 - (9 - a)x^3 - 33x^2 - 2x + 2$$

$$65. \left(\frac{7}{3}\right)x^3 + \left(\frac{5}{6}\right)x^2 - \left(\frac{5}{3}\right)x - \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$67. \left(\frac{8}{3}\right)x^3 - 3x^2 - \left(\frac{1}{8}\right)x$$

$$69. \left(\frac{1}{7}\right)x^4 - \left(\frac{2}{3}\right)x^3 + \left(\frac{3}{5}\right)x^2 + \left(\frac{2}{3}\right)x - \left(\frac{13}{2}\right)$$

$$71. 4ax^4 - 4bx^3 + 5cx^2 + 2dx + 2$$

$$73. 18x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 24x^2 - 18x + 20$$

$$75. -2x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 5x$$

$$77. -2x^6 + 4x^5 + 27x^4 - x^3 - x^2$$

$$79. a^5x^4 - 5ax^2 - 50$$

$$81. a^3x^3 - 3a^2bx^2 + 3ab^2x - b^3$$

$$83. a^2x^3 + (4a - a^2)x^2 + (4 - 4a)x - 4$$

$$85. 3x^4 + 12x^3 - x^2 - 24x + 7$$

$$87. x^3 + \left(\frac{7}{3}\right)x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)x - \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$89. 7x^3 + 5x^2 + 10x + 3$$

$$91. -2x^5 + 2x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 5x$$

$$93. a = 1 \quad b = 8 \quad c = -13$$

$$95. q = 1 \quad r = -2ab$$

$$97. q = b - 1 \quad r = -b^2 + 7b - 5$$

$$99. q = 3 \quad r = 8x + 19$$

$$101. q = z^3 - 2z^2 + 4z - 20$$

$$r = 70z^2 - 60z - 100$$

$$103. q = x^3 - 5x^2 + 9x + 13 \quad r = -4x - 14$$

$$105. q = x^3 + 2x^2 + 7x + 19 \quad r = 62$$

$$107. q = -x + 2 \quad r = 3$$

$$109. q = x^2 + ax + a^2 \quad r = 0$$

111. $q = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}$ $r = \frac{1}{6}$
 113. $q = 3x + 2$ $r = 0$
 115. $q = a - b$ $r = 0$
 117. $q = a^3 - ba^2 + b^2a - b^3$ $r = 0$
 119. $q = x^3 + 3x^2 - x - 21$ $r = -70x + 98$
 121. $q = 4x^2 - 8x - 5$ $r = 30x^2 - 13x - 6$
 123. $q = x + \left(\frac{2}{3}\right)$ $r = \left(\frac{1}{3}\right)x + 1$
 125. $q = y - 1$ $r = 2y^2 + 3y$
 127. $q = x^2 + x + 1$ $r = x^2 + x + 1$
 129. $q = x^3 + 3x^2 + 5x + 10$ $r = 15$
 131. $q = x^2 - x + 1$ $r = 0$
 133. $q = x + \left(\frac{1}{2}\right)$ $r = \frac{15}{2}$
 135. $q = 2y^3 - 4y^2 + 2y + 3$ $r = -6$
 137. $q = 2x - 4$ $r = -4$
 139. $q = x$ $r = 1$
 141. (a) $\frac{4}{a^4}$; (b) $\frac{y^2}{3x^3}$; (c) $-\frac{6t}{5s}$
 143. (a) $\frac{2}{x+2}$; (b) $\frac{x-y}{x-4y}$
 145. (a) $\frac{t+4}{t+3}$; (b) $\frac{3x+y}{x}$
 147. (a) $-x - 4$; (b) $x^2 + 3x + 9$
 149. $\frac{y-x}{y+x}$ 151. $\frac{x+y}{x-y}$ 153. -2
 155. $4x(2x + 1)$ 157. $a^3(a^2 - 3a + 1)$
 159. $6y(6x - y)$ 161. $a^2b^3(a^2 - ab + b^3)$
 163. $-4y^2z(3xyz + 7y + 5x^2z)$
 165. $y^{2n}(y^n - y + 1)$ 167. $(a + 8)(a - 8)$

169. $(x + 7y)(x - 7y)$ 171. $(2s + 5r)(2s - 5r)$
 173. $(3xy + 4w^3)(3xy - 4w^3)$
 175. $(x^{2n} + y^{3n})(x^{2n} - y^{3n})$
 177. $(x + 2)(x + 5)$ 179. $(a - 4)(a - 6)$
 181. $(t + 4)(t - 8)$ 183. $(3x - y)(7x - y)$
 185. $(x + 3)^2$ 187. $(4x - 1)^2$
 189. $(2a - 3b)^2$
 191. $\{3\}$ 193. $\{2\}$ 195. $\{3\}$
 197. $\emptyset$ 199. $\{-\frac{13}{49}\}$ 201. $\{2\}$
 203. $\{2\}$ 205. $\{2\}$
 207. $x = \frac{3}{4}b$ 209. $y = a + 3b, a \neq 2b$
 211. $x = 3a - 5b, a \neq -b$
 213. $\{64\}$ 215. $\emptyset$ 217. $\{\frac{7}{2}\}$
 219. $\{4\}$ 221. $\{3\}$ 223. $\{4\}$
 225. $\emptyset$ 227. $\{0, 3\}$ 229. $\{7\}$
 231. $\{-2\}$ 233. $\{\frac{5}{3}, 3\}$ 235. $\{-7\}$
 237. $\{1, 2\}$ 239. $\{-3, 0\}$ 241. $\{\pm 1, \pm 2\}$
 243. $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2\}$
 245. $\frac{15}{2}, \frac{3}{2}$ 247. 23, 14 249. 12 cm, 8 cm
 251. 423 *adultos*, 387 *estudiantes*
 253. \$15,840, \$7,920, \$2,640 255. \$5000
 257. 24 g de aleación de oro al 80%, 16 g de aleación
 de oro al 55%
 259. $15 \frac{5}{8}$ lb de té de \$4.10 $9 \frac{3}{8}$ lb de té de \$4.90

261. $8\frac{1}{3}$ cuartos de galón 263. 6 litros.
265. $\{\pm 7\}$ 267. $\pm \frac{2}{5}\sqrt{15}$ 269. $\{0, \frac{1}{4}\}$
271. $\{3, 5\}$ 273. $\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\}$ 275. $\{-\frac{6}{7}\}$
277. $\{-\frac{1}{3}, 2\}$
279. $\{-1, 4\}$ 281. $\{1 \pm \sqrt{3}\}$ 283. $\{\frac{2 \pm \sqrt{14}}{5}\}$
285. $\{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\}$ 287. $\{2 \pm \sqrt{3}i\}$
289. $\{(3, -5)\}$ 291. $\{(\frac{9}{4}, \frac{3}{2})\}$
293. $(0, -4)$ 295. $(\frac{43}{6}, \frac{13}{3})$
297. $\{(-1.5, -1, 3)\}$
299. $\{(1, 0)\}$ 301. $\{(0, -2)\}$
303. $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})\}$ 305. $\{(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})\}$
307. $\{(-4, 7)\}$
309. \$6.30 por libra de té; \$2.60 por libra de café.
311. 20; \$120
313. $\frac{400}{3} \text{ cm}^3$ de solución al 15% de ácido; $\frac{800}{3} \text{ cm}^3$ de solución al 6% de ácido.
315. $17\frac{1}{2} \text{ mi/h}$; $2\frac{1}{2} \text{ mi/h}$
317. $6\frac{1}{4} \text{ mi/h}$; 12 mi/h
319. $\{(3, 1, 0)\}$ 321. $\{(1, 2, 1)\}$
323. $\{(-3, 2, -4)\}$ 325. $\emptyset$
327. $\{(3, 1, -2)\}$
329. \$10 000 al 10%; \$5000 al 12%; \$10 000 al 16%

331. 20 oz (onzas) de la primera aleación; 40 oz de la segunda; 10 oz de la tercera.
333. $\{(3,4); (-4, -3)\}$
335. $\{(-1,0); (\frac{3}{2}, \frac{5}{4})\}$
337. $\{(\frac{17}{5}, \frac{8}{5})\}$
339. $\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{5}}{2}), (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-5-\sqrt{5}}{2})\}$
341. $\{(-2 + 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}), (-2 - 2\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})\}$
343. $\{(i, -4i), (-i, 4i), (-4, -1), (4,1)\}$
345. $\{(2,0), (-2,0), (0,2)\}$
347. $\{(2\sqrt{3}, \sqrt{13}), (-2\sqrt{3}, \sqrt{13}), (2\sqrt{3}, -\sqrt{13}), (-2\sqrt{3}, -\sqrt{13})\}$
349. $\{(-3,0), (5,4), (5, -4)\}$
351. $\{(2,4), (-2, -4)\}$
353. $\{(-1,2), (1, -2), (\frac{2}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6}), (-\frac{2}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6})\}$
355. $\{(1,2), (-1,2), (1, -2), (-1, -2)\}$
357. 6,10
359. 12 cm, 35 cm
361. $\{(\frac{1}{2}, -1)\}$
363. $\{(4, 6)\}$
365. $\{(3, -1, 2)\}$
367. $\{(2, -3, 8)\}$
369. $\{(-7t - 10, 6t + 8, t)\}$
371. $\{(-2, 2, -3, 1)\}$
373. $\emptyset$; inconsistente

4.3. UNIDAD III TRIGONOMETRÍA

- Trace el plano cartesiano y ubique los pares ordenados indicados.

3. a) $59^{\circ}10'48''$ b) $75^{\circ}16'48''$
 5. 60° 7. -90°
 9. -252° 11. $74^{\circ}20'4''$
 13. $-143^{\circ}14'22''$ 15. $39^{\circ}32'57''$
 17. $\frac{\pi}{8}$ 19. $\frac{3\pi}{4}$
 21. $\frac{11\pi}{2}$ 23. $-1,7502$
 25. $2,4909$ 27. $2,1884$
 29. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 31. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 33. $-\sqrt{2}$
 35. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ 37. $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$
 39. $\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 41. $\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
 43. a) $252^{\circ}, \frac{7\pi}{5}$; b) $2245^{\circ}, \frac{5\pi}{4}$; c) $60^{\circ}, \frac{\pi}{3}$
 45. $112,5$ metros. 47. $5,6$ metros.
 49. $7,54$. 51. $-\frac{7\pi}{64}$ radianes.
 53. $28,283^{\circ}$ 55. $176,6^{\circ}$
 57. $1500,666^{\circ}$ 59. $-500,083^{\circ}$
 61. $350,5^{\circ}$
 63. $-(20^{\circ}34,8')$ 65. $480^{\circ}33,6'$
 67. $215^{\circ}40,2'$ 69. $216^{\circ}34,2'$
 71. $-(1247^{\circ}58,8')$
 73. -300° 75. 2.520°
 77. $-(103^{\circ}7'56,78'')$ 79. $143^{\circ}14'22,2''$
 81. $-(33^{\circ}12'31,7'')$
 83. $\operatorname{sen} A = \frac{8}{17}, \cos A = \frac{15}{17}, \tan A = \frac{8}{15}, \text{etc.}$

$$85. \operatorname{sen} B = 0,8; \cos B = 0,6; \tan B = 1,3$$

$$87. \frac{2\sqrt{6}}{7}, \frac{5}{7}, \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$89. \frac{\sqrt{m^2+mn}}{m+n}, \frac{\sqrt{mn+n^2}}{m+n}, \frac{1}{n}\sqrt{mn}.$$

$$91. 13,42$$

$$93. r\sqrt{k^2 + 1}.$$

$$95. \frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$97. c = 50, B = 60^\circ, b = 25\sqrt{3}.$$

$$99. c = 20\sqrt{2}, A = 45^\circ, a = 20.$$

$$101. B = 70^\circ, a = 27,36, b = 75,18.$$

$$103. B = 54^\circ, a = 0,5878, b = 0,8090.$$

$$105. B = 80^\circ, a = 5,289, c = 30,46.$$

$$107. B = 15^\circ, b = 21,43, c = 82,82.$$

$$109. A = 63^\circ, B = 27^\circ, b = 19,52.$$

$$111. A = 25^\circ, B = 65^\circ, c = 55,18.$$

$$113. A = 65^\circ, B = 25^\circ, b = 14,09.$$

$$115. 160,7 \text{ metros.} \quad 117. 50^\circ$$

$$119. 258 \text{ m, } 228 \text{ m.} \quad 121. 451,2 \text{ m.}$$

$$123. 35^\circ 16'$$

$$125. C=75^\circ, b=32,66, c=44,61.$$

$$127. C=55^\circ, b=70,74, a=56,10.$$

$$129. C=123^\circ 12', b=2257, c=2599.$$

$$131. \text{Dos, uno, ninguno, uno.}$$

$$133. B_1 = 66^\circ 9', C_1 = 58^\circ 27', c_1 = 18,64$$

$$B_2 = 113^\circ 51', C_2 = 10^\circ 45', c_2 = 4,081.$$

$$135. B_1 = 16^\circ 43', A_1 = 147^\circ 28', a_1 = 35,52.$$

$$B_2 = 163^\circ 17', A_2 = 0^\circ 54', a_2 = 1,037.$$

137. 2,124.
 141. 19,26.
 145. 8,921.
 147. $C=55^{\circ}20'$, $b=567,6$, $c=663,9$.
 149. $A=26^{\circ}$, $a=0,4450$, $c=0,9942$.
 151. $B=59^{\circ}5'$, $a=33,78$, $c=18,54$.
 153. $C=33^{\circ}27'$, $a=1994$, $b=3395$.
 155. $A=108^{\circ}53'$, $a=476,4$, $b=203,2$.
 157. $C=123,2^{\circ}$, $b=2051$, $c=2363$.
 159. $A=48,11^{\circ}$, $a=5640$, $c=7523$.
 161. $A=41,56^{\circ}$, $b=92,80$, $c=24,70$.
 163. $C=69,005^{\circ}$, $a=3324$, $c=7483$.
 165. $A=10,18^{\circ}$, $a=0,5330$, $c=2,670$.
 251. $30^{\circ}, 156^{\circ}, 210^{\circ}, 330^{\circ}$
 253. $60^{\circ}, 120^{\circ}, 240^{\circ}, 300^{\circ}$
 255. $22\frac{1}{2}^{\circ}, 112\frac{1}{2}^{\circ}, 202\frac{1}{2}^{\circ}, 292\frac{1}{2}^{\circ}$.
 257. $45^{\circ}, 135^{\circ}, 225^{\circ}, 315^{\circ}$.
 259. $60^{\circ}, 300^{\circ}$.
 261. $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$.
 263. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.
 265. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{6\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}$.
 267. $120^{\circ}, 240^{\circ}$
 269. $60^{\circ}, 120^{\circ}$
 271. $30^{\circ}, 150^{\circ}, 210^{\circ}, 330^{\circ}$
 273. $135^{\circ}, 315^{\circ}$
 275. $120^{\circ}, 240^{\circ}$
139. 7,81.
143. $-\frac{1}{4}$.

277. $30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$.
 279. $30^\circ, 330^\circ$.
 281. $90^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 270^\circ$.
 283. $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$.
 285. $0^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 315^\circ, 360^\circ$.
 287. $210^\circ, 330^\circ$.
 289. $0^\circ, 360^\circ$.
 291. 60° .
 293. $71^\circ 34', 251^\circ 34'$.
 295. $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$.
 297. $70^\circ 32', 280^\circ 28'$.
 299. $45^\circ, 116^\circ 34', 225^\circ, 296^\circ 34'$.
 301. $90^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ$.
 303. $204^\circ 28', 335^\circ 32'$.
 305. $135^\circ, 315^\circ$.
 307. $0^\circ, 106^\circ 16', 360^\circ$.
 309. $0^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 360^\circ$.
 311. $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.
 313. $\operatorname{sen}(x + y) = \frac{4}{5}, \cos(x + y) = \frac{3}{5}$.
 315. b) 0,0178
 325. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
 335. $2 + \sqrt{3}$.
 337. $6/7, 2/9$.

5. BIBLIOGRAFIA

ABARCA, H. (2014). Trigonometría. Quito - Ecuador: Escuela Politécnica del Ejército.

ARCOS, J. G. (2014). Problemas y ejercicios de Matemática Superior. Quito- Ecuador: ESPE.

ARROBA R., Jorge; LARA P., Jorge. (2014). Análisis Matemático. Quito: Universidad Central del Ecuador.

BENITEZ, R. (2014). Fundamentos de Geometría y Trigonometría. Trillas.

Benalcázar H. (2007). *Matemática para el bachillerato*. Imprenta “El Gran libro” Quito. Ecuador.

Batallas B. Cadena H. (2011). *Geometría Plana*. Ibarra. Ecuador: Universidad Técnica del Norte.

Batallas B. Cadena H. (2011). *Calculo Diferencial*. Ibarra. Ecuador: Universidad Técnica del Norte.

Batallas B. Cevallos H. (2017). *Math II Cálculo Diferencial*. Ibarra. Ecuador: Universidad Técnica del Norte.

Batallas B. Cadena H. Verdezoto C. (2018). *Cálculo integral*. Ibarra. Ecuador: Universidad Técnica del Norte.

COLE. Jeffery A; SWOKOWSKI, Earl W. (2018). *Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica*. Cengage Learning.

Earl, S. W. (2017). *Álgebra y Trigonometría*. Moscú: Grupo Editorial Iberoamérica S. A.

Erwin, K. (2014). *Matemática para ingeniería*. New York: Imprenta New York.

ESPOL, I. (2016). *Fundamentos de Matemática*. Guayaquil: ESPOL.

FANNON Paúl, KADELBURG Vesna, WOOLLEY Ben, WARD Stephen. (2018). *Mathematics Standard Level*. New York: Cambridge University Press.

GARCIA ARCOS, J. (2011). *Problemas y Ejercicios de Matemática Superior*. Quito - Ecuador: ESPE.

GARZA OLVERA, B. (2014). *Geometría y Trigonometría*. Person.

LARSON, R. (2015). Fundamentos de Algebra Lineal. Mexico: Cengage Learning.

Leithold L. Álgebra

MAX A. Sobel, LERNER Nobert. (2016). Álgebra. México: Prentice Hall Hispano Americana, S.A. Quinta Edición.

RAMOS, E. (2010). Álgebra Pre Universitaria. Perú: Servicios Gráficos J.J.

Ramos, E. E. (2015). Algebra Pre Universitaria. Lima-Perú: Servicios Gráficos J.J.

RODRIGUEZ, Milagros; SANCHEZ, Arsenio; RODRIGUEZ, Salvador Ochoa. (2012). Pearson.

SPIEGEL, M. (2015). Álgebra Superior. México: Mc Graw-Hill.

VITERI, P. (2016). *Álgebra Superior*. Quito: EPN.

VITERI, P. (1992). *Funciones Reales I*. Edicumbre. Quito. EPN.

VITEL, P. (1996). *Trigonometría*. Edicumbre. Quito.
EPN.